1 Algebră (30p)

Se dă o matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu determinantul 0 ce satisface ecuația:

$$A^3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Totodată, fie $B \in M_2(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Se cer rezolvări complete pentru următoarele:

- (a) Explicați de ce matricea B (nu) este o soluție a ecuației date. [3p]
  Acordarea punctajului:
  - 2p Se calculează $det(B)$ și se demonstrează că acesta este nenul.
  - 1p Concluzie: B **nu** este o soluție a ecuației date.
- (b) Demonstrați că există cel puțin o soluție pentru ecuația dată în care toate elementele matricei A vor fi egale. [7p]
  Acordarea punctajului:
  - 2p Se notează $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
  - 2p Se calculează A^2 și A^3 și se introduc în ecuația inițială.
  - 2p Ecuația se simplifică și ajunge la forma $2a^3 - 3a^2 + 1 = 0$.
  - 1p Se găsește cel puțin una dintre soluțiile $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, respectiv $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
  - *Notă:* O rezolvare care pornește de la una din soluții și o verifică va fi și ea punctată complet.
- (c) Calculați toate soluțiile ecuației date. [20p]
  Acordarea punctajului este relativă la acest subpunct, însă o modalitate de rezolvare ar putea fi:
  - Se folosește **Hamilton-Cayley**: $A^2 - Tr(A)A + det(A)A = O_2$.
  - Deoarece $det(A) = 0$, concluzionăm că $A^2 = Tr(A)A$.
  - Calculăm $A^3 = (A^2) * A = Tr(A) * A^2 = Tr^2(A)A$.
  - Ne întoarcem la ecuația inițială și ajungem la $(Tr^2(A) - 3Tr(A))A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.
  - Trecem la *urmă*: $Tr\left((Tr^2(A) - 3Tr(A))A\right) = Tr\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\right)$.
  - Se formează ecuația $Tr^3(A) - 3Tr^2(A) + 4 = 0$. Notăm deci $t = Tr(A)$ și rezolvăm ecuația $t^3 - 3t^2 + 4 = 0$.
  - Observăm descompunerea $(t-2)^2(t+1) = 0$, de unde luăm pe rând cazurile:
  - $Tr(A) = t = 2$:
    - Din $(Tr^2(A) - 3Tr(A))A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ obținem $-2A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$
    - Concluzie: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ soluție.
  - $Tr(A) = t = -1$:
    - Din $(Tr^2(A) - 3Tr(A))A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ obținem $4A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$
    - Concluzie: $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ soluție.

2 Analiză 1 (30p)

Fie $f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, o funcție definită astfel:

$$f_k(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } k = 1 \\ x^{f_{k-1}(x)} & \text{dacă } k \geq 2 \end{cases}$$

Se cer rezolvări complete pentru următoarele:

- (a) Demonstrați că $f_3'(1)$ este un număr natural. [5p]

  Acordarea punctajului:

  - 2p Se scrie $f_3(x)$ într-o formă mai prietenoasă cu derivatele: $f_3(x) = e^{f_2(x)ln(x)}$.
  - 2p Se derivează funcția și se obține $f_3'(x) = x^{x^x}\left(x^x \ln(x)(\ln(x)+1) + x^{x-1}\right)$.
  - 1p Se calculează $f_3'(1) = 1 \in \mathbb{N}$.

- (b) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_k = \lim_{x\to 0} f_k(x)$. Studiați convergența șirul (a_n). [9p]

  Acordarea punctajului:

  - 6p Se demonstrează inductiv că a_k este 0 când k este impar și 1 când k este par. Atenție la redactare!
  - 3p Șirul este alcătuit din două șiruri monotone și mărginite (constante chiar) ce alternează și converg la valori diferite, deci este divergent.

- (c) Studiați monotonia funcției $f_k(x)$, presupunând că k este impar. [16p]

  Acordarea punctajului:

  - 4p Se observă (și demonstrează inductiv) faptul că $f_k'(x) = f_k(x)\left(f_{k-1}'(x)ln(x) + \frac{f_{k-1}(x)}{x}\right)$
  - 1p Se înlocuiește f_{k-1}' pe baza definiției anterioare:

  $$f_k'(x) = f_k(x)\left(f_{k-1}(x)\left(f_{k-2}'(x)ln(x) + \frac{f_{k-2}(x)}{x}\right)ln(x) + \frac{f_{k-1}(x)}{x}\right)$$

  - 2p Pentru orice x și k, $f_k(x) \geq 0$. Continuăm demonstrația prin inducția $f_k'(x) > 0$, oricare ar fi k impar. Vom scăpa deci de $f_k(x)$ din expresia anterioară. Continuăm:

  $$f_{k-1}(x)\left(f_{k-2}'(x)ln(x) + \frac{f_{k-2}(x)}{x}\right)ln(x) + \frac{f_{k-1}(x)}{x} \geq 0$$

  - 1p Desfacem parantezele muncitorește:

  $$f_{k-1}(x)f_{k-2}'(x)ln^2(x) + \frac{f_{k-1}(x)f_{k-2}(x)}{x}ln(x) + \frac{f_{k-1}(x)}{x} \geq 0$$

  - 2p Știm că $f_k(x) \geq 0$, $f_k'(x) \geq 0$ și $ln^2(x) \geq 0$, deci prima parte se duce. Totodată, $x > 0$, deci înmulțim totul prin x și ajungem la:

  $$f_{k-1}(x)f_{k-2}(x)ln(x) + f_{k-1}(x) \geq 0$$

  - 1p $f_k(x) \geq 0$, deci restrângem la $f_{k-2}(x)ln(x) + 1 \geq 0$, sau $ln((f_{k-1}(x))) + 1 \geq 0$. Ducem 1 în cealaltă parte și scăpăm de logaritm: $(f_{k-1}(x)) \geq \frac{1}{e}$.
  - 2p Continuăm demonstrația prin inducția $f_{k-1}(x) \geq \frac{1}{e}$. Vom minora x^x către $\frac{1}{e}$. Trebuie deci să justificăm $e^{x^{\frac{1}{e}}lnx} \geq \frac{1}{e}$. Deci $x^{\frac{1}{e}}lnx \geq -1$. Împărțim prin $x^{\frac{1}{e}}$ și acum trebuie să demonstrăm că $lnx + x^{\frac{-1}{e}} \geq 0$.
  - 1p Derivăm membrul stâng și egalăm cu 0 pentru a găsi punctele de extrem local, mai exact $x_0 = e^{-e}$. Acesta va fi punctul de minim, așadar minorăm cu e^{-e} și vom obține (în ultima inducție pe care încercăm să o dovedim) $(e^{-e})^{(}e^{-e})^{\frac{1}{e}} \geq \frac{1}{e}$, care este o propoziție adevărată (fiind chiar egale).
  - 2p Așadar, $f_{k-1}(x) \geq \frac{1}{e}$, deci inducția $f_k'(x) \geq 0$ este adevărată. Concluzie: f_k crescătoare!

3 Analiză 2 (30p)

Fie $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $f : M_1 \to \mathbb{R}$ și $g : M_2 \to \mathbb{R}$, unde M_1, M_2 reprezintă domeniile maxime de definiție ale funcțiilor f, respectiv g. Totodată, considerăm funcțiile definite astfel:

$$f(x) = \frac{tg^5 x}{cos^3 x} \quad ; \quad g(x) = \int_1^x \frac{t^2+1}{t^4-t^2+1}\,dt$$

Se cer rezolvări complete pentru următoarele:

- (a) Demonstrați că $f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. [2p]
  Acordarea punctajului:
  - 1p $tg(x) = tg(x+2\pi)$, deci $tg^5(x) = tg^5(x+2\pi)$.
  - 1p $cos(x) = cos(x+2\pi)$, deci $cos^5(x) = cos^5(x+2\pi)$. Concluzie: $f(x) = f(x+2\pi)$.
- (b) Fie $F(x)$ o primitivă a funcției f astfel încât $F(0) = \frac{8}{105}$. Calculați $F(\frac{\pi}{3})$. [16p]
  Acordarea punctajului:
  - 2p $F(x) = \int f(x)\,dx + c$, unde $c \in \mathbb{R}$, c constantă.
  - 10p Se calculează integrala; o modalitate corectă ar putea fi:
    * Separăm termenii astfel încât să rămânem cu o putere pară la tangentă:
    $$\int \frac{tgx}{cos^3 x} * tg^4 x\,dx$$
    * Ne folosim de faptul că $tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x} - 1$, deci integrala devine:
    $$\int \frac{tgx}{cos^3 x}\left(\frac{1}{cos^2 x} - 1\right)^2 dx = \int \frac{tgx}{cos^3 x}\left(\frac{1}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x} + 1\right) dx$$
    * Scriem tgx drept $\frac{sinx}{cosx}$ și introducem între paranteze numitorul:
    $$\int sinx\left(\frac{1}{cos^8 x} - \frac{2}{cos^6 x} + \frac{1}{cos^4 x}\right) dx$$
    * Facem înlocuirea $u = cosx$, deci $du = -sinx\,dx$:
    $$-\int \frac{1}{u^8} - \frac{2}{u^6} + \frac{1}{u^4}\,du = \frac{1}{7u^7} - \frac{2}{5u^5} + \frac{1}{3u^3} = \frac{1}{7cos^7 x} - \frac{2}{5cos^5 x} + \frac{1}{3cos^3 x}$$
  - 2p Calculăm constanta prin faptul că $F(0) = \frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + c = \frac{8}{105} + c$, deci $c = 0$.
  - 2p Calculăm $F(\frac{\pi}{3}) = \frac{2^7}{7} - \frac{2^6}{5} + \frac{2^3}{3} = \frac{856}{105}$.
- (c) Calculați $g(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$. [12p]
  Acordarea punctajului:
  - 10p Se ajunge la concluzia că $g(x) = arctg\left(x - \frac{1}{x}\right)$. O modalitate de calcul:
    * Observăm că numitorului îi lipsește un $-t^2$ pentru a se restrânge, așadar forțăm o restrângere oricum (adăugând de la noi t^2):
    $$g(x) = \int_1^x \frac{t^2+1}{t^4-t^2+1}\,dt = \int_1^x \frac{t^2+1}{(t^2-1)^2+t^2}\,dt$$
    * Simplificăm forțat prin t^2:
    $$g(x) = \int_1^x \frac{1+\frac{1}{t^2}}{(t-\frac{1}{t})^2+1}\,dt$$
    * Facem înlocuirea $u = t - \frac{1}{t}$, deci $du = 1 + \frac{1}{t^2}\,dt$.
    $$g(x) = \int_0^{x-\frac{1}{x}} \frac{1}{u^2+1}\,du = arctg(x - \frac{1}{x})$$
  - 2p $x - \frac{1}{x} = 1$ (prin aducere la același numitor sau prin realizarea faptului că parametrul cerut este ϕ), deci $g(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$.

Se vor acorda **10p** din oficiu.
Toate subiectele sunt obligatorii. Mult succes tuturor!