Se acordă **10p** din oficiu. Total: **100p**.

Rezolvarea tuturor subiectelor este obligatorie.

Timp de lucru efectiv: **150 min**. Succes!

Problema 1.

Algebră. Punctaj maxim: **20p**

Se dă ecuația $A^3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, unde $A \in M_2(\mathbb{R})$ este o matrice cu determinantul 0. Totodată, se mai cunoaște o matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $2B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

- **(a)** Explicați de ce matricea B este (sau nu este) o soluție a ecuației date. [3p]
- **(b)** Demonstrați că există *cel puțin* o soluție pentru ecuația dată în care toate elementele matricei A vor fi egale între ele. [7p]
- **(c)** Calculați suma tuturor soluțiilor ecuației date. [10p]

Problema 2.

Analiză XI. Punctaj maxim: **30p**

Fie $f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, o funcție definită după formula: $f_k(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } k = 1 \\ x^{f_{k-1}(x)} & \text{dacă } k \geq 2 \end{cases}$.

- **(a)** Demonstrați că $f_3'(1)$ este un număr natural. [5p]
- **(b)** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_k = \lim\limits_{x\to 0} f_k(x)$. Studiați convergența șirul (a_n). [9p]
- **(c)** Studiați monotonia funcției $f_k(x)$, presupunând că k este impar. [16p]

Problema 3.

Analiză XII. Punctaj maxim: **30p**

Fie $M_1, M_2, M_3 \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $f : M_1 \to \mathbb{R}$, $g : M_2 \to \mathbb{R}$ și $h : M_3 \to \mathbb{R}$, unde M_1, M_2 și M_3 reprezintă domeniile maxime de definiție ale funcțiilor f, g respectiv h. Totodată, considerăm funcțiile anterior menționate definite astfel:

$$f(x) = \frac{tg^5 x}{cos^3 x} \quad ; \quad g(x) = \int_1^x \frac{t^2+1}{t^4-t^2+1}\,dt \quad ; \quad h(x) = \int_{x-2}^x \frac{tgx}{t^4-t^2+1}\,dt$$

(a) Calculați $h(1)$. [4p]

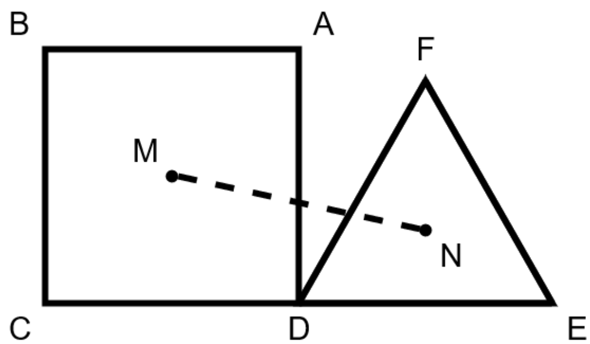
(b) Fie $F(x)$ o primitivă a funcției f astfel încât $F(0) = \frac{8}{105}$. Calculați $F(\frac{\pi}{3})$. [14p]

(c) Calculați $g(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$. [12p]

Problema 4.

Geometrie. Punctaj maxim: **10p**

Fie $ABCD$ un pătrat de latură x și $\triangle DEF$ un triunghi echilateral de latură tot x astfel încât punctele C, D, E să fie coliniare. Fie M, N centrele de greutate ale pătratului, respectiv triunghiului anterior menționate. Un desen ilustrativ:



(a) Știind că $x = 1$, calculați aria triunghiului $\triangle DEF$. [1p]

(b) Calculați AF în funcție de x. [2p]

(c) Calculați MN în funcție de x. [7p]

Vă mulțumesc tuturor pentru participare și răbdare! Problemele **2** și **4** au fost scrise în totalitate de mine. Subiectele alese sunt în mod deliberat *puțin* mai grele decât subiectele de Politehnică.

Bonus. Aceste subiecte sunt doar curiozități ulterioare, ele **nu valorează nimic!**

(a) *Problema 4*: Este AF paralel cu MN? Motivați.

(b) *Problema 2*: Studiați monotonia funcției $f_k(x)$, presupunând că k este par. *(personal, nu am încă o demonstrație, deși e vizibil cu ochiul liber că funcția descrește iar apoi crește).*