Metode pentru Soluționarea Ec. Diferențiale

Valentin-Ioan VINTILĂ

Facultatea de Automatică și Calculatoare - CTI
Universitatea POLITEHNICA București

23 mai 2023 (Lab. 12b)

Cuprins

ODE (1)

Vom discuta exclusiv despre **ODE** *(Ordinary Differential Equations)*, fiind cele mai simplu de soluționat numeric.

Care este soluția unei ecuații diferențiale?

Rezultatul este **o funcție**!

ODE (2)

La modul general, fie $f(t, y)$ o funcție continuă pe domeniul $D = [a, b] \times \mathbb{R}$. Dacă f satisface o condiție *Lipschitz* pe D în variabila y, atunci avem ecuația diferențială:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = f(t, y)}, \quad y(a) = \alpha$$

Aceasta va avea o **unică soluție** pentru $y(t)$, unde $t \in [a, b]$.

Metoda lui Euler – intuiție geometrică (1)

Înainte să discutăm despre formalismul matematic al metodei, vreau să dezvoltăm o **intuiție geometrică**.

Vrem să aflăm **forma unei curbe necunoscute** care începe dintr-un punct P_0 și care satisface o ecuație diferențială ordinară.

În această situație, ecuația diferențială poate fi văzută drept **panta tangentei la graficul funcției** în oricare punct al acesteia.

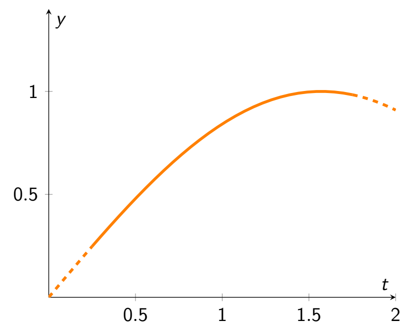
Metoda lui Euler – intuiție geometrică (2)

Dacă din punctul de început $P_0(t_0, y_0)$ ne deplasăm **pe direcția tangentei** cu un pas **mic**, $h \in \mathbb{R}$, o să aterizăm *foarte aproape* de un punct care s-ar afla pe grafic.

Notăm punctul în care am ajuns cu $P_1(t_0 + h, y_1)$ și repetăm procesul.

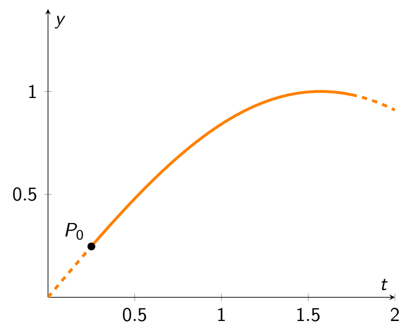
Colectăm deci punctele $P_0(t_0, y_0)$, $P_1(t_0 + h, y_1) = P_1(t_1, y_1)$, $P_2(t_1 + h, y_2) = P_2(t_2, y_2)$, ș.a.m.d.

Metoda lui Euler – intuiție geometrică (3)



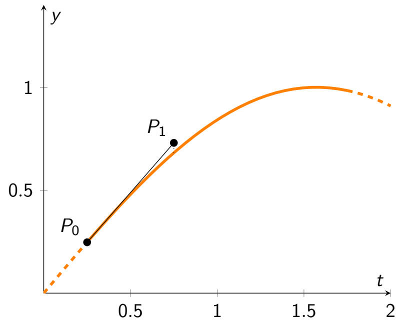
Graficul unei funcții generice

Metoda lui Euler – intuiție geometrică (4)



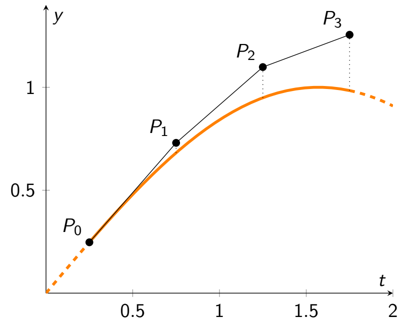
Graficul unei funcții generice cu punctul P_0 marcat

Metoda lui Euler – intuiție geometrică (5)



Graficul unei funcții generice cu punctele P_0 și P_1 marcate

Metoda lui Euler – intuiție geometrică (6)



Graficul unei funcții generice cu punctele $P_0, \dots, P_3$ marcate

Metoda lui Euler – forma analitică

Fie o ecuație diferențială ordinară, de forma $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$. Considerăm acum progresia aritmetică $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aleasă astfel încât $t_k = t_0 + kh$, unde $t_0, h \in \mathbb{R}$ sunt constante cunoscute.

Metoda lui Euler presupune utilizarea următoarei recurențe:

$$\boxed{y\left(t_{k+1}\right) \approx y(t_k) + h \cdot f(t_k, y(t_k))}, \; \forall k = \overline{0, n-1}$$

Alternativ, dacă notăm cu y_k aproximarea lui $y(t_k)$, $\forall k = \overline{0, n}$, formula de recurență devine:

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)}, \; \forall k = \overline{0, n-1}$$

Metoda lui Euler – exemplu (1)

Să considerăm următoarea ecuație diferențială:

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot sin^2 t, \; y(0) = 0.5$$

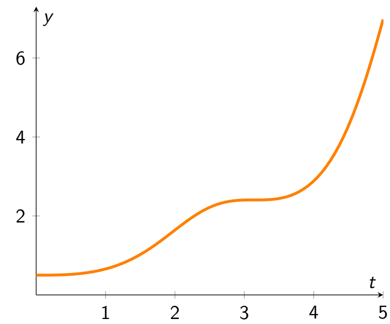
Analitic, aceasta va avea ca soluție funcția:

$$y(t) = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(t - \sin t \cdot \cos t\right)\right\}$$

Numeric, urmăm $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)$, considerând $h = 0.5$:

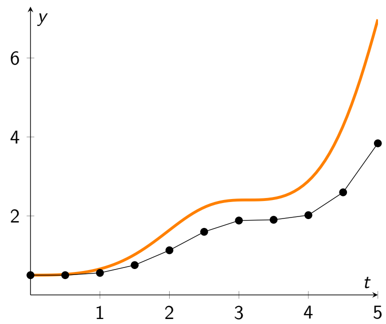
$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h \cdot \left(y_k \cdot sin^2 t_k\right) \\ &= y_k + \frac{1}{2} \cdot y_k \cdot \sin^2\left(t_0 + \frac{k}{2}\right) \end{aligned}$$

Metoda lui Euler – exemplu (2)



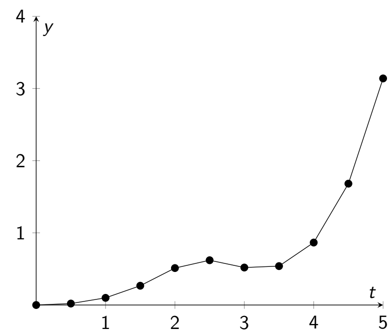
Graficul **analitic** pentru funcția y (pe care, numeric, nu îl avem)

Metoda lui Euler – exemplu (3)



Graficul **analitic vs numeric** pentru y

Metoda lui Euler – exemplu (4)



Eroarea introdusă de metoda lui Euler cu $h = 0.5$

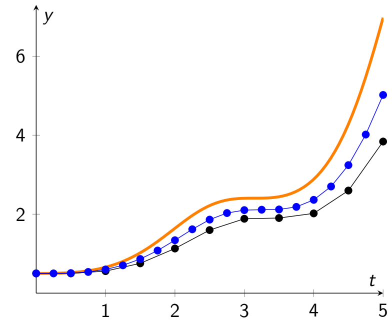
Metoda lui Euler – exemplu (5)

Cum ar arăta exemplul dacă am înjumătăți pasul?

Dacă $h \to 0.25$, atunci recurența devine:

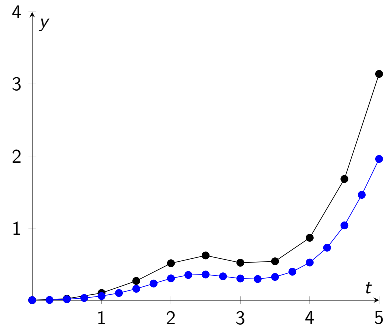
$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{4} \cdot y_k \cdot \sin^2\left(t_0 + \frac{k}{4}\right)$$

Metoda lui Euler – exemplu (6)



Graficul **analitic vs numeric** pentru y

Metoda lui Euler – exemplu (7)



Eroarea introdusă de metoda lui Euler cu $h = 0.5$ și $h = 0.25$

Metoda lui Euler – exemplu (8)

Eroarea devine mai mare decât 0.25 în:

- **3 iterații** pentru $h = 0.5$;
- **8 iterații** pentru $h = 0.25$.

Metode Runge-Kutta (1)

Să considerăm ecuația diferențială $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ și progresia aritmetică $t_k = t_0 + kh$. Cunoaștem $y(t_0)$, vrem $y(t_k)$.

Dacă notăm cu $y_k \approx y(t_k)$ aproximarea căutată, atunci, utilizând **metodele Runge-Kutta** explicite, s-ar obține formula:

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h\sum_{i=1}^{\mu} b_i\Psi_i}, \ \forall k = \overline{0, n-1}$$

Metode Runge-Kutta (2)

Să disecăm puțin formula:

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_{i=1}^{\mu} b_i\Psi_i$$

- Observăm că, precum metoda lui Euler, depinde de aproximarea anterioară, y_k;
- Utilizează un pas h de îmbunătățire;
- Depinde de ponderile $b_1, \dots, b_\mu$, deci, dacă $\sum_{i=1}^{\mu} b_i = 1$, atunci discutăm de o **medie ponderată** $\Rightarrow$ *metodă consistentă*.

Metode Runge-Kutta (3)

În funcție de **ordinul metodei**, valoarea μ va varia.

Cum arată Ψ_i?

$$\Psi_1 = f(t_k,\ y_k)$$

$$\Psi_2 = f\left(t_k + c_2 h,\ y_k + h(a_{21}\Psi_1)\right)$$

$$\Psi_3 = f\left(t_k + c_3 h,\ y_k + h(a_{31}\Psi_1 + a_{32}\Psi_2)\right)$$

$$\boxed{\Psi_\mu = f\left(t_k + c_\mu h,\ y_k + h\sum_{j=1}^{\mu-1} a_{\mu j}\Psi_j\right)}$$

Metode Runge-Kutta – Tabele Butcher

Pentru a simplifica notațiile utilizate în cadrul metodelor Runge-Kutta, pentru o anumită metodă, se construiește următorul tabel:

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_\mu & a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu,\mu-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{\mu-1} & b_\mu
\end{array}$$

Tabel Butcher (la modul general)

RK4 (1)

Cea mai cunoscută și utilizată metodă de tip Runge-Kutta este cea de ordin 4, notată prescurtat **RK4** și definită explicit, $\forall k = \overline{0, n-1}$, sub forma:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(\Psi_1 + 2\Psi_2 + 2\Psi_3 + \Psi_4\right)$$

unde $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ provin din:

$$\begin{cases}
\Psi_1 &= f(t_k, y_k) \\
\Psi_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + h\frac{\Psi_1}{2}\right) \\
\Psi_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + h\frac{\Psi_2}{2}\right) \\
\Psi_4 &= f\left(t_k + h, y_k + h\Psi_3\right)
\end{cases}$$

RK4 (2)

Alternativ, putem adopta scrierea tabelară:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

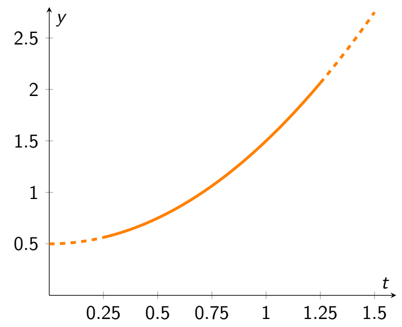
Tabel Butcher pentru RK4

RK4 – intuiție geometrică (1)

Să construim o ecuație diferențială ordinară:

$$y = t^2 + 0.5 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2y-1}{t}$$

RK4 – intuiție geometrică (2)



Ecuația $y = t^2 + 0.5 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2y-1}{t}$

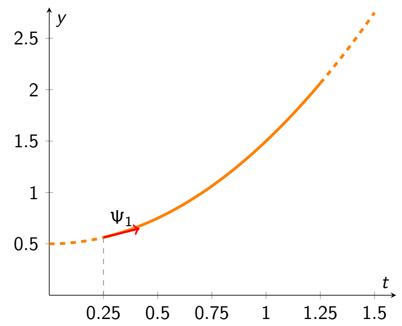
RK4 – intuiție geometrică (3)

Ca la Euler, pornim din $P_0(t_0, y_0)$ și vrem să ajungem în $P_1(t_0 + h, y_1)$.

Vom folosi o **sumă ponderată de direcții**, decisă de $\Psi_1, \ldots, \Psi_4$.

Putem vizualiza efortul **vectorial**!

RK4 – intuiție geometrică (4)



Ecuația $y = t^2 + 0.5 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2y-1}{t}$, alături de Ψ_1

RK4 – intuiție geometrică (5)

Amintim formula analitică pentru Ψ_2:

$$\Psi_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + h\frac{\Psi_1}{2}\right)$$

De nicăieri, notăm $\boxed{t_0 + \frac{h}{2} = x}$. Înlocuim:

$$\Psi_2 = f\left(x, x\Psi_1 + y_0 - t_0\Psi_1\right)$$

Ce am obținut? O dreaptă!

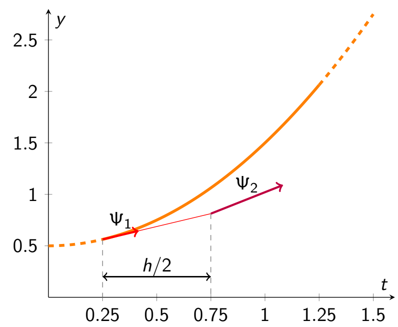
RK4 – intuiție geometrică (6)

Grafic, am pornit cu $x = t_0 + \frac{h}{2}$, deci ne-am deplasat cu $\frac{h}{2}$ unități la dreapta față de axa Ot.

Ca să păstrăm analogia vectorială, ne vom deplasa pe direcția lui $\overrightarrow{\Psi_1}$ (nu uitați că Ψ_1 **nu** este de fapt un vector!).

Am obținut pe slide-ul anterior o formulă liniară pentru Ψ_2 care depinde de panta Ψ_1. Să vedem grafic...

RK4 – intuiție geometrică (7)



Calcularea lui Ψ_2

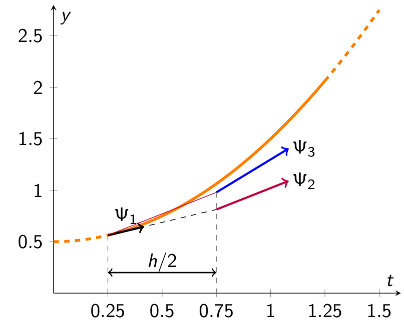
RK4 – intuiție geometrică (8)

Același raționament pentru Ψ_3:

$$\Psi_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + h\frac{\Psi_2}{2}\right) \Rightarrow f\left(x, x\Psi_2 + y_0 - t_0\Psi_2\right)$$

Observăm același fenomen, doar că în funcție de Ψ_2.

RK4 – intuiție geometrică (9)



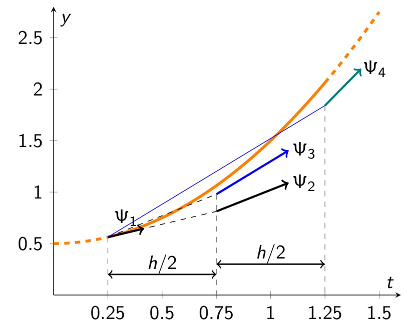
Calcularea lui Ψ_3.

RK4 – intuiție geometrică (10)

Facem același lucru și pentru Ψ_4:

$$\Psi_4 = f\left(t_0 + h, y_0 + h\Psi_3\right) \Rightarrow f\left(x, x\Psi_3 + y_0 - t_0\Psi_3\right)$$

RK4 – intuiție geometrică (11)

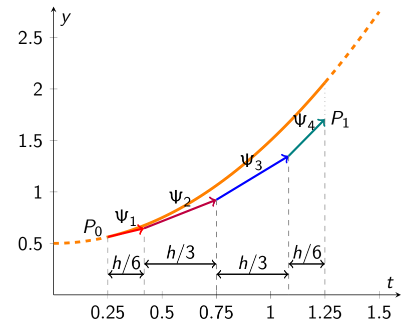


Calcularea lui Ψ_4.

RK4 – intuiție geometrică (12)

Nu în ultimul rând, ținând cont de ponderile cu care se adună acești "vectori", obținem următorul grafic:

RK4 – intuiție geometrică (13)



Însumarea vectorilor $\overrightarrow{\Psi_1}, \dots, \overrightarrow{\Psi_4}$ pentru a se obține poziția lui P_1.

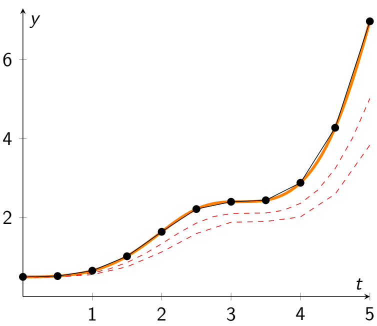
RK4 – exemplu (1)

Să ne amintim exemplul ecuației diferențiale:

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot \sin^2 t,\ y(0) = 0.5$$

Considerând $h = 0.5$, vom calcula curba folosind algoritmul RK4 și îl vom compara cu metoda lui Euler când $h = 0.5$, respectiv când $h = 0.25$.

RK4 – exemplu (2)



Curba calculată prin RK4 ($h = 0.5$) și comparată cu metoda lui Euler, atât pentru $h = 0.5$, cât și pentru $h = 0.25$.

RK4 – exemplu (3)

Cea mai mare eroare (în valoare absolută) nu depășește 0.007!

Avem deci eroare mult mai mică decât Euler!

Alte metode RK

Pentru a vă pregăti de examen, aveți în vedere și alte metode RK:

1. **Euler** poate fi privit ca o metodă RK;
2. **Metode RK2** la modul general, sau **metoda lui Heun** și **metoda punctului de mijloc**, două particularizări cunoscută;
3. **Metoda RK3**, propusă de însuși **Kutta**.

Bibliografie

Toate resursele bibliografice de care aveți nevoie se găsesc în descrierea cu care a venit atașată această prezentare.

Sfârșit...?

Mulțumesc frumos pentru acest semestru!

Vă rog frumos să **completați formularul de feedback**!