# Metode pentru Integrarea Numerică (1)

**Valentin-Ioan VINTILĂ**

Facultatea de Automatică și Calculatoare - CTI
Universitatea POLITEHNICA București

16 mai 2023 (Lab. 11)



## Cuprins





## Cuadraturi (1)

Termenul de **cuadratură** (**cvadratură** sau chiar **quadratură**) este un termen istoric care face referire la procesul de calculare a unei arii.

În literatura *numerică*, prin **cuadratură** înțelegem aria de sub graficul unei funcții – adică **integrala definită** a unei funcții.



## Cuadraturi (2)

**Definiție (Cuadratură numerică)**

Fie $f : [x_0, x_n] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă și continuă pe întreg intervalul de definiție.

Totodată, fie mulțimea $M = \{(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2 \mid y_k = f(x_k),\ k = \overline{0, n}\}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_k < x_{k+1}$, $\forall k < n$, o mulțime de $n + 1$ puncte distincte ordonate crescător, reprezentând evaluări ale funcției $f$.

Dacă $(\omega_n)_n \in \mathbb{R}$ este un șir de numere reale, aproximarea:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)}$$

poartă denumirea de **cuadratură numerică**.



## Cuadraturi (3)

De la interpolare, ne amintim:

1. **Polinomul Lagrange** care interpolează $M$:

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) \cdot f(x_k)$$

2. **Eroarea de interpolare**:

$$\varepsilon_L(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

**Care este eroarea integrării numerice?** *La tablă...*



## Metoda dreptunghiurilor – introducere

Ideea principală – aproximăm aria de sub grafic cu dreptunghiuri.

**Cum putem alege dreptunghiurile?**

1. **Înălțimea din stânga / dreapta / mijloc**;
2. Înălțimea minimă / maximă.



## Metoda dreptunghiurilor – exemplu (1)

Să considerăm $f(x) = e^x - 1$. Vrem să o integrăm pe domeniul $[0, 2]$.

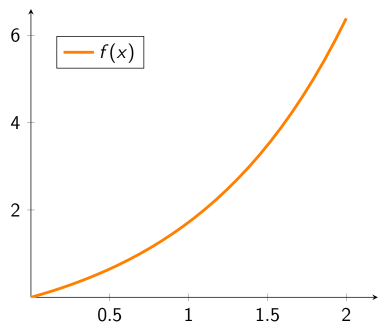
**Analitic:**

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 e^x - 1\,dx = \left[e^x - x\right]_0^2 \approx 4.389$$

**Numeric:** ...

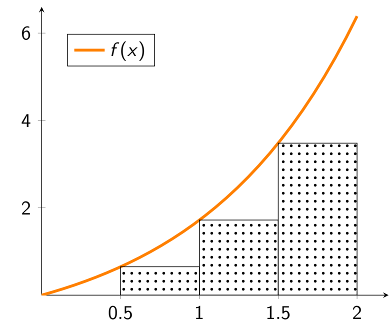


## Metoda dreptunghiurilor – exemplu (2)




Graficul funcției $f(x) = e^x - 1$ pe $[0, 2]$

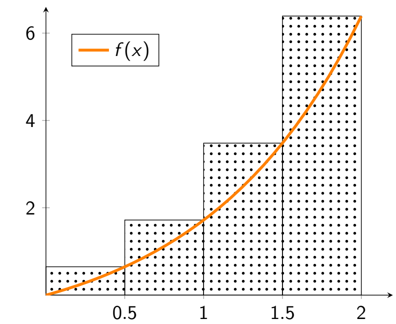
## Metoda dreptunghiurilor – exemplu (3)




Graficul funcției $f(x) = e^x - 1$ și integrarea la stânga pe $[0, 2]$



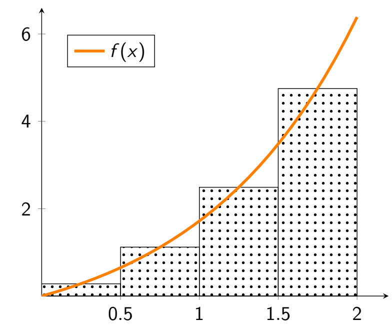
## Metoda dreptunghiurilor – exemplu (4)




Graficul funcției $f(x) = e^x - 1$ și integrarea la dreapta pe $[0, 2]$



## Metoda dreptunghiurilor – exemplu (5)




Graficul funcției $f(x) = e^x - 1$ și integrarea din mijloc pe $[0, 2]$



## Metoda dreptunghiurilor – exemplu (6)

Calculată matematic, integrala ar fi fost egală cu $\int_0^2 e^x - 1\,dx \approx 4.389$, iar folosind aceste trei metode, se obțin următoarele trei rezultate:

$$\int_0^2 e^x - 1\,dx \approx \begin{cases} \text{din stânga:} & 2.924 \\ \text{din dreapta:} & 6.119 \\ \text{din mijloc:} & 4.323 \end{cases}$$

Observăm cum eroarea cea mai bună se obține în mijloc. Așadar, vom studia în continuare numai acest caz de selecție al înălțimii.



## Metoda dreptunghiurilor – eroare

Fără a demonstra formula, considerăm eroarea metodei:

$$\boxed{\varepsilon(f) \leq \frac{x_n - x_0}{24} h^2 \cdot \max_{\xi \in [x_0, x_n]} \left\{ \left| f''(\xi) \right| \right\}}, \text{ cu } h = x_{k+1} - x_k$$

*Puteți să o demonstrați ca temă...*



## Metoda trapezelor – introducere

Schimbăm figura geometrică:

Dreptunghiuri $\rightarrow$ Trapeze

Evident, dispar toate subcategoriile – există un singur mod de a crea aceste trapeze.



## Metoda trapezelor – exemplu (1)

Să calculăm integrala pe $[0, 6]$ pentru $f(x) = \sin(x + 2) + \sqrt{x}$.

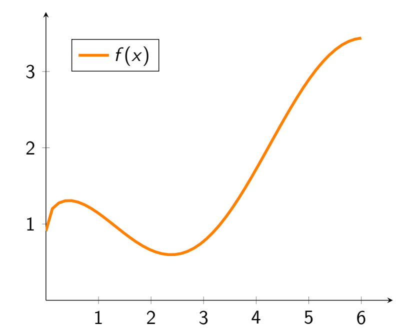
**Analitic:**

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \left[ -\cos(x+2) + \frac{3}{2}\sqrt{x^3} \right]_0^6 \approx 9.527$$

**Numeric:** ...

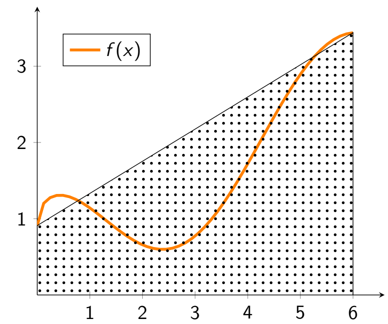


## Metoda trapezelor – exemplu (2)




Graficul funcției $f(x) = \sin(x + 2) + \sqrt{x}$ pe $[0, 6]$

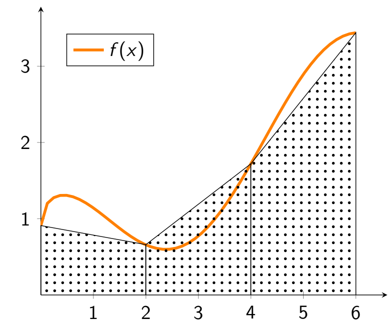
## Metoda trapezelor – exemplu (3)




Graficul funcției $f(x) = \sin(x+2) + \sqrt{x}$ pe $[0, 6]$, alături de integrarea utilizând un singur trapez (două puncte)



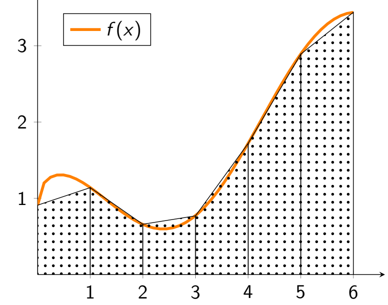
## Metoda trapezelor – exemplu (4)




Graficul funcției $f(x) = \sin(x+2) + \sqrt{x}$ pe $[0, 6]$, alături de integrarea utilizând trei trapeze (patru puncte)



## Metoda trapezelor – exemplu (5)




Graficul funcției $f(x) = \sin(x+2) + \sqrt{x}$ pe $[0, 6]$, alături de integrarea utilizând șase trapeze (șapte puncte)



## Metoda trapezelor – exemplu (6)

Calculată matematic, integrala ar fi fost egală cu $\int_0^6 \sin(x+2) + \sqrt{x}\, dx \approx 9.527$, iar folosind metoda trapezelor (compuse), se obțin următoarele trei rezultate:

$$\int_0^2 e^x - 1\, dx \approx \begin{cases} \text{un trapez:} & 13.044 \\ \text{trei trapeze:} & 9.104 \\ \text{șase trapeze:} & 9.359 \end{cases}$$

Observăm cum eroarea cea mai bună se obține crescând numărul de trapeze (puncte luate în considerare).

Pentru acest exemplu, am obține o eroare mai mică decât 0.1 cu doar **9 trapeze**, respectiv mai mică decât 0.01 cu **44**.



## Metoda trapezelor – eroare

Fără a demonstra formula, considerăm eroarea metodei:

$$\boxed{\varepsilon(f, h) \le \frac{x_n - x_0}{12} h^2 \cdot \max_{\xi \in [x_0, x_n]} \left\{ \left| f''(\xi) \right| \right\}}, \text{ cu } h = x_{k+1} - x_k$$

*Puteți să o demonstrați ca temă...*



## Thomas Simpson

**Thomas Simpson** (1710 – 1761)



## Metodele Simpson

Metoda dreptunghiurilor utilizează, la urma urmei, **funcții de grad 0** (constante) pentru a aproxima ariile.

Metoda trapezelor utilizează la rândul său **funcții de grad 1** (segmente) pentru a calcula ariile de sub grafic.

Dacă am folosi **funcții de grad 2** (parabole), am ajunge la **metoda Simpson 1/3**.



## Metoda Simpson 1/3 (1)

Începem cu *o singură parabolă*.

Să zicem că vrem să aproximăm $\int_a^b f(x)\, dx$, unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabil și continuă.

Considerăm punctul de mijloc $m = \frac{a+b}{2}$. Prin interpolarea Lagrange a punctelor $(a, f(a))$, $(m, f(m))$ și $(b, f(b))$ am obține:

$$L(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}$$

## Metoda Simpson 1/3 (2)

Dar știm că $f(x) \approx L(x)$, deci $\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L(x)\,dx$.

Avem deci o modalitate simplă de a aproxima integrala:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]}$$

Formula anterioară funcționează pentru o singură parabolă, însă poate fi generalizată pentru mai multe subintervale.



## Metoda Simpson 1/3 (3)

Fie $f : [x_0, x_n] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă și continuă pe întreg intervalul de definiție. Totodată, fie mulțimea $M = \{(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2 \mid y_k = f(x_k),\ k = \overline{0, n}\}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este par, o mulțime de $n+1$ puncte distincte și echidistante ordonate crescător, reprezentând evaluări ale funcției $f$.

Dacă notăm cu $h = \frac{b-a}{n}$ distanța între oricare două abscise $x_k$ și $x_{k+1}$ consecutive, obținem următoarele două formule:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{n/2}\left[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right] \\ &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + f(x_n)\right]\end{aligned}}$$

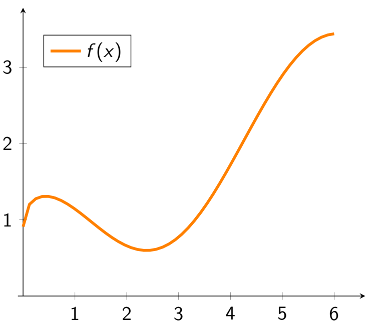


## Metoda Simpson 1/3 – exemplu (1)

Vom exemplifica metoda folosind aceeași funcție, $f(x) = \sin(x+2) + \sqrt{x}$, tot pe intervalul $[0, 6]$, iar apoi vom compara rezultatele cu ce obținusem anterior la trapeze.



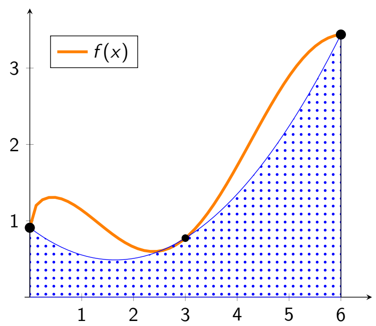
## Metoda Simpson 1/3 – exemplu (2)




Graficul funcției $f(x) = \sin(x+2) + \sqrt{x}$ pe $[0, 6]$



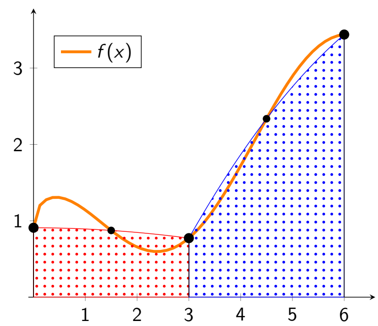
## Metoda Simpson 1/3 – exemplu (3)




Graficul funcției $f(x) = \sin(x+2) + \sqrt{x}$ pe $[0, 6]$, alături de integrarea prin Simpson 1/3 cu o parabolă (3 puncte)



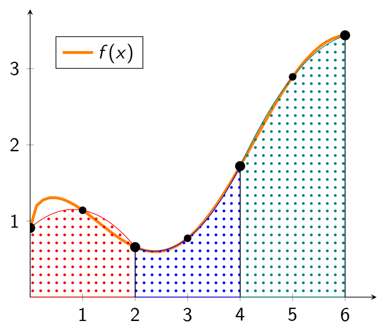
## Metoda Simpson 1/3 – exemplu (4)




Graficul funcției $f(x) = \sin(x+2) + \sqrt{x}$ pe $[0, 6]$, alături de integrarea prin Simpson 1/3 cu două parabole (5 puncte)



## Metoda Simpson 1/3 – exemplu (5)




Graficul funcției $f(x) = \sin(x+2) + \sqrt{x}$ pe $[0, 6]$, alături de integrarea prin Simpson 1/3 cu trei parabole (7 puncte)



## Metoda Simpson 1/3 – exemplu (6)

Observăm rezultatele obținute prin această aproximare:

$$\int_0^6 \sin(x+2) + \sqrt{x}\,dx \approx \begin{cases} \text{o parabolă:} & 7.441 \\ \text{două parabole:} & 9.368 \\ \text{trei parabole:} & 9.444 \end{cases}$$

Amintim rezultatul corect, 9.527, respectiv aproximările obținute prin metoda trapezelor compuse:

$$\int_0^6 \sin(x+2) + \sqrt{x}\,dx \approx \begin{cases} \text{un trapez:} & 13.044 \\ \text{trei trapeze:} & 9.104 \\ \text{șase trapeze:} & 9.359 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ algoritmul **converge mai rapid**!

## Metoda Simpson 1/3 – eroare

Vom trece în revistă, fără demonstrație, eroarea algoritmului:

$$\varepsilon(f,h) = -\frac{x_n - x_0}{180} h^4 \cdot f^{(4)}(\xi) \Rightarrow \boxed{\varepsilon(f,h) \le \frac{x_n - x_0}{180} h^4 \cdot \max_{\xi \in [x_0, x_n]} \left\{ |f^{(4)}(\xi)| \right\}}$$



## Bonus – Metoda Simpson 3/8

Se poate merge și mai departe, trecând de la ecuații de grad 2 la ecuații de grad 3. Nu insistăm, însă prezentăm pe scurt formula:

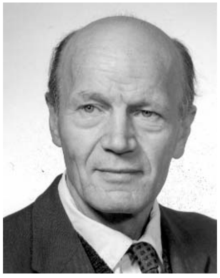
$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\Big[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + 2f(x_6) + \cdots + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$$
$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3\sum_{i \ne 3k}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=1}^{n/3-1} f(x_{3j}) + f(x_n)\right]$$

Eroarea este și ea îmbunătățită:

$$\varepsilon(x) = -\frac{h^4}{405}(b-a) \cdot f^{(4)}(\xi)$$



## Werner Romberg



**Werner Romberg** (1909 – 2003)



## Metoda Romberg (1)

**Metoda Romberg** utilizează:

1. **Metoda trapezelor compuse** pentru integrare;
2. **Extrapolarea Richardson** pentru îmbunătățirea erorii.



## Metoda Romberg (2)

Vom defini câteva valori de forma $\Psi_i^j \in \mathbb{R}$, unde $i \in \overline{0,n}$ și $j \in \overline{0,i}$. Considerăm $h_i = \frac{1}{2^i}(b-a)$. Atunci:

1. Prin excepție pentru $i = j = 0$:

$$\Psi_0^0 = h_1\big[f(a) + f(b)\big]$$

   La nivel logic, aceasta este **metoda trapezului**.

2. Pentru $j = 0$ și $i > 0$:

$$\boxed{\Psi_i^0 = \frac{1}{2}\Psi_{i-1}^0 + h_i \sum_{k=1}^{2^{i-1}} f\Big(a + (2k-1)h_i\Big)}, \ \forall i \ge 1$$

   Se poate demonstra (*puteți ca temă*) că aceasta este de fapt o recurență pentru **metoda trapezelor compuse**.



## Metoda Romberg (3)

3. Ultimul pas – aplicarea extrapolării Richardson pentru $i, j > 0$:

$$\boxed{\Psi_i^j = \frac{1}{4^j - 1}\left(4^j \cdot \Psi_i^{j-1} - \Psi_{i-1}^{j-1}\right)}, \ \forall i \ge j \ge 1$$



## Metoda Romberg – exemplu (1)

Să considerăm funcția $f : [-2, 1.5] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 6$$

**Analitic:**

$$\int_{-2}^{1.5} f(x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - x^3 + 6x\right]_{-2}^{1.5} = 14.809375$$

**Numeric:** ...



## Metoda Romberg – exemplu (2)

| $i \setminus j$ | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|
| 0 | 16.953125 | | |
| 1 | 18.627929 | 19.186197 | |
| 2 | 15.969177 | 15.082926 | 14.809375 |

Tabel pentru $\Psi_i^j$ (rezultatul se află în $\Psi_2^2$)

## Bibliografie

**Toate resursele bibliografice de care aveți nevoie se găsesc în descrierea cu care a venit atașată această prezentare.**



## Sfârșit

### Mulțumesc frumos pentru atenție!

Vă rog frumos să **completați formularul de feedback**!