Metode de Aproximare

Valentin-Ioan VINTILĂ

Facultatea de Automatică și Calculatoare - CTI
Universitatea POLITEHNICA București

02 mai 2023 (Lab. 9)

Cuprins

Despre acest capitol

Acest capitol este:
- **Dificil** – nu îl veți înțelege doar din laborator;
- **Lung** – tratează multe subiecte;
- **Teoretic** – nu o să aplicăm practic nimic (la laborator).

O să vă cer **atenție maximă**, fiind **subiect de examen** și **subiect la lucrarea de laborator**!

Interpolare vs aproximare (1)

Ce înțelegem prin interpolare?

Procesul prin care încercăm să calculăm funcția f astfel încât $M = \{(x_k, y_k) \mid f(x_k) = y_k\}$, unde M este dată.

Trecem deci **prin** punctele din M.

Ce înțelegem prin aproximare?

Vom trece **printre** punctele din M.

Interpolare vs aproximare (2)

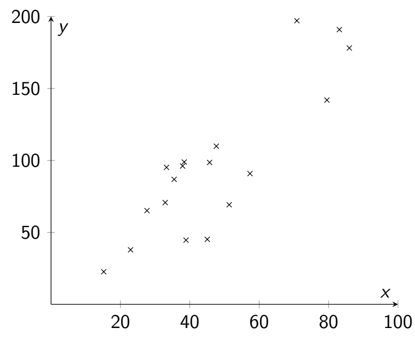
De ce am prefera să aproximăm?

Pentru că uneori obținem rezultate mai apropiate de realitate – de exemplu, citirea intrărilor unui senzor.

Regresie (1)

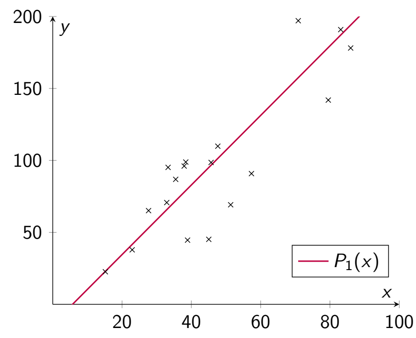
Începem simplu – dându-se M, vrem să găsim **o dreaptă** care să aproximeze cât mai bine funcția $f(x)$.

Regresie (2)



O mulțime de puncte M

Regresie (3)



O mulțime de puncte M aproximată de $P_1(x) \approx 2.4175x - 13.8107$

Regresie (4)

Pornim de la formula unei drepte:

$$\boxed{P_1(x) = a_0 + a_1 x}, \text{ unde } a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Definim **eroarea de aproximare** prin:

$$\boxed{\varepsilon(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - P_1(x_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a_1 x_i + a_0)\right]^2}$$

Evident, vrem să **minimizăm** eroarea ϵ.

Regresie (5)

Ce înseamnă să minimizăm o funcție?

Derivatele parțiale trebuie să fie nule:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial a_0}(a_0, a_1) & = 0 \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial a_1}(a_0, a_1) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_1 x_i - a_0) & = 0 \\ -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_1 x_i - a_0) \cdot x_i & = 0 \end{cases}$$

Separând termenii, obținem următoarele două ecuații pe care le vom considera fundamentale:

$$\boxed{\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}}$$

Regresie (6)

Putem să obținem formule (*oribile*) pentru a_0 și a_1 acum.

$$\boxed{a_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}}$$

Regresie (7)

Ce facem dacă vrem să folosim polinoame mai complexe decât dreptele?

Schimbăm metoda de aproximare, întrucât lucrurile devin foarte complicate foarte repede!

Polinoame ortogonale (1)

Definiție (funcție pondere)

Fie $\omega : D \subseteq \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ o funcție oarecare. Atunci când este folosită alături de o sumă, serie sau integrală, funcția ω poartă denumirea de **funcție pondere**.

De exemplu, funcția $\omega(x) = \exp\left\{\frac{-x^2}{2}\right\}$ va accentua elementele apropiate de 0 și aproape le va ignora pe celalte.

Polinoame ortogonale (2)

Definiție (polinoame ortogonale – cazul continuu)

Fie $\{f_0, \ldots, f_n \mid f_k : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall k = \overline{0, n}\}$ o mulțime de $n + 1$ funcții, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Spunem că funcțiile din mulțime sunt **ortogonale** între ele în raport cu o funcție pondere $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ dacă:

$$\boxed{\langle f_i, f_j \rangle_\omega = \int_a^b f_i(x) \cdot f_j(x) \cdot \omega(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \neq j \\ \alpha_i, & \text{dacă } i = j \end{cases}}$$

unde $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in (0, +\infty)$. Suplimentar, dacă $\alpha_k = 1$, $\forall k = \overline{0, n}$, atunci funcțiile se consideră **ortonormate** între ele.

Polinoame ortogonale (3)

De unde provin aceste polinoame ortogonale?

Din ecuații diferențiale de forma:

$$Q(x)\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + L(x)\frac{df}{dx} + \lambda f = 0$$

Tocmai pentru că sunt **greu de *inventat*** astfel de polinoame, se utilizează **familii de polinoame predefinite**, precum Cebâșev, Legendre etc.

Polinoame ortogonale (3)

De unde provin aceste familii consacrate? Acceptăm, fără demonstrație însă, următoarea recurență:

$$\boxed{\begin{cases} P_{-1}(x) = 0 \\ P_0(x) = 1 \\ P_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) P_k(x) - \beta_k P_{k-1}(x), \quad k \geq 0 \end{cases}}$$

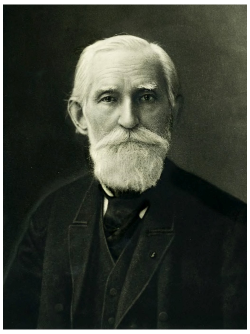
unde prin α_k, $\forall k \geq 0$, se înțelege:

$$\boxed{\alpha_k = \frac{\langle x P_k, P_k \rangle_\omega}{\langle P_k, P_k \rangle_\omega} = \frac{\int_a^b x P_k^2(x) \cdot \omega(x)\, dx}{\int_a^b P_k^2(x) \cdot \omega(x)\, dx}}, \ \forall k \geq 0$$

respectiv, prin β_k, $\forall k \geq 1$, se înțelege:

$$\boxed{\beta_k = \frac{\langle P_k, P_k \rangle_\omega}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle_\omega} = \frac{\int_a^b P_k^2(x) \cdot \omega(x)\, dx}{\int_a^b P_{k-1}^2(x) \cdot \omega(x)\, dx}}, \ \forall k \geq 1$$

Pafnuty Chebyshev (Cebâșev)



Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894)

Polinoame ortogonale – Cebâșev (1)

Alegem $[a, b] = [-1, 1]$ și $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Atunci:

$$\langle T_i, T_j \rangle_\omega = \int_{-1}^{1} T_i(x) \cdot T_j(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Conform recurenței, obținem:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \end{cases}$$

Alternativ, putem privi:

$$\boxed{T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right)}$$

Polinoame ortogonale – Cebâșev (2)

Primele câteva polinoame Cebâșev sunt:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 5x \\ T_5(x) &= 16x^6 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

Polinoame ortogonale – Cebâșev (3)

Dacă am face produsul, am obține:

$$\boxed{\langle T_i, T_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \pi, & i = j = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0 \end{cases}}$$

Ce ne încurcă? $\langle T_0, T_0 \rangle = \pi$ e caz particular.

Cum reparăm? Modificăm polinoamele Cebâșev astfel încât $\langle T_0, T_0 \rangle = \frac{\pi}{2}$

Polinoame ortogonale – Cebâșev (4)

Primele câteva polinoame Cebâșev **modificate** sunt:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 5x \\ T_5(x) &= 16x^6 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

Am obținut așadar $\boxed{\langle T_i, T_i \rangle = \frac{\pi}{2}}$

Adrien-Marie Legendre

Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

Polinoame ortogonale – Legendre (1)

Alegem $[a, b] = [-1, 1]$ și $\omega(x) = 1$. Atunci:

$$\langle L_i, L_j \rangle_\omega = \int_{-1}^{1} L_i(x) \cdot L_j(x)\, dx$$

Conform recurenței, obținem:

$$\boxed{\begin{cases} L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = x \\ L_{k+1}(x) = \dfrac{2k+1}{k+1} x L_k(x) - \dfrac{k}{k+1} L_{k-1}(x) \end{cases}}$$

Polinoame ortogonale – Legendre (2)

Alternativ, putem să utilizăm:

- Formula lui Rodrigues:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right]$$

- Formula cu sume de combinări:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 (x-1)^{n-k} (x+1)^k$$

Polinoame ortogonale – Legendre (3)

Primele câteva polinoame Legendre sunt:

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= 1\\
L_1(x) &= x\\
L_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\\
L_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\\
L_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\\
L_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
\end{aligned}
$$

Produsul scalar este $\boxed{\langle L_i, L_i \rangle = \frac{2}{2i+1}}$

Polinoame ortogonale – trigonometrice Fourier (1)

Alegem $[a, b] = [0, 2\pi]$ și $\omega(x) = 1$. Atunci:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \int_0^{2\pi} u_i(x) \cdot u_j(x)\, dx$$

Definim polinoamele ortogonale trigonometrice simplu:

$$\boxed{u_n = \begin{cases} 1, & n = 0\\ \sin(kx), & n = 2k+1, k \in \mathbb{N}\\ \cos(kx), & n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Polinoame ortogonale – trigonometrice Fourier (2)

Dacă am face produsul, am obține:

$$\boxed{\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j\\ 2\pi, & i = j = 0\\ \pi, & i = j \neq 0 \end{cases}}$$

Ce ne încurcă? $\langle u_0, u_0 \rangle = 2\pi$ e caz particular.

Cum reparăm? Modificăm polinoamele Cebâșev astfel încât $\langle u_0, u_0 \rangle = \pi$

Polinoame ortogonale – trigonometrice Fourier (3)

Definim polinoamele ortogonale trigonometrice modificate:

$$\boxed{u_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & n = 0\\ \sin(kx), & n = 2k+1, k \in \mathbb{N}\\ \cos(kx), & n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Am obținut așadar $\boxed{\langle u_i, u_i \rangle = \pi}$

Normă

Definiție (normă)

Considerăm funcția pondere $\omega(x)$. Asemănător normei de la vectori, definim, pentru $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, norma:

$$\boxed{||f||_\omega = \sqrt{\langle f, f \rangle}} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) \cdot \omega(x)\, dx}$$

Aproximarea continuă în sensul CMMP (1)

Prin aproximarea în sensul celor mai mici pătrate a unei funcții $f \in L^2_\omega$ înțelegem căutarea unui polinom $p_n \in \mathbb{P}_n$ de grad $n \in \mathbb{N}$, denumit **cel mai bun aproximant în sensul CMMP**, care satisface următoarea egalitate:

$$\boxed{||f - p_n||_\omega = \min_{r_n \in \mathbb{P}_n} ||f - r_n||_\omega}$$

De unde provine denumirea de CMMP?

Denumirea provine din cazul particular în care $\omega(x) = 1$, situație care presupune de fapt minimizarea erorii:

$$\varepsilon = ||f - p_n|| = \sqrt{\int_a^b \Big[f(x) - p_n(x)\Big]^2 dx}$$

Aproximarea continuă în sensul CMMP (2)

Teoremă (legătura cu polinoamele ortogonale)

Polinomul $p_n \in \mathbb{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, se consideră cel mai bun aproximant al funcției f ($||f|| < \infty$) dacă și numai dacă respectă următoarea egalitate pentru orice polinom $q \in \mathbb{P}_n$:

$$\boxed{\langle f - p_n, q \rangle = 0}, \ \forall q \in \mathbb{P}_n$$

Fie $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ o bază ortogonală a subspațiului $\mathbb{P}_n$. În acest context, avem certitudinea că polinomul $p_n(x)$ poate fi scris sub forma unor proiecții ale lui f pe polinoamele din subspațiul U, adică:

$$\boxed{p_n(x) = \frac{\langle f, u_1 \rangle}{||u_1||^2} u_1(x) + \frac{\langle f, u_2 \rangle}{||u_2||^2} u_2(x) + \dots + \frac{\langle f, u_n \rangle}{||u_n||^2} u_n(x)}$$

Aproximarea continuă în sensul CMMP (3)

De unde putem obține baza ortogonală U?

- **Gram-Schmidt** – același algoritm ca la QR, doar că în loc de vectori, utilizăm polinoame;
- **Bazele cunoscute** – nu degeaba am discutat toate bazele polinomiale ortogonale (Cebâșev, trigonometrice etc.).

Aproximarea continuă în sensul CMMP (4)

Aproximăm CMMP folosind **Cebâșev modificat**:

$$p_n(x) = \frac{\langle f, T_0\rangle}{||T_0||^2} T_0(x) + \frac{\langle f, T_1\rangle}{||T_1||^2} T_1(x) + \dots + \frac{\langle f, T_n\rangle}{||T_n||^2} T_n(x)$$

Simplificat, notăm $\alpha_k = \dfrac{\langle f, T_k\rangle}{||T_k||^2}$:

$$\boxed{p_n(x) = \alpha_0 T_0(x) + \alpha_1 T_1(x) + \dots + \alpha_n T_n(x)}$$

Se pot găsi formule dedicate pentru α_k:

$$\boxed{\alpha_k = \frac{2}{\pi} \cdot \langle f, T_k\rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) \cdot T_k(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}, \ \forall k = \overline{0, n}$$

Aproximarea continuă în sensul CMMP (5)

Aproximăm CMMP folosind **polinoame trigonometrice modificate**:

$$p_n(x) = \frac{\langle f, u_0\rangle}{||u_0||^2} u_0(x) + \frac{\langle f, u_1\rangle}{||u_1||^2} u_1(x) + \dots + \frac{\langle f, u_n\rangle}{||u_n||^2} u_n(x)$$

Simplificat, notăm $\alpha_k = \dfrac{\langle f, u_k\rangle}{||u_k||^2}$:

$$\boxed{p_n(x) = \alpha_0 u_0(x) + \alpha_1 u_1(x) + \dots + \alpha_n u_n(x)}$$

Se pot găsi formule dedicate pentru α_k:

$$\boxed{\alpha_k = \frac{1}{\pi} \cdot \langle f, u_k\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x) \cdot u_k(x)\, dx}, \ \forall k = \overline{0, n}$$

Henri Padé

Henri Padé (1863–1953)

Aproximări Padé (1)

Să ne uităm puțin la funcția $f : \mathbb{R}_+ \to [1, \sqrt{2}),\ f \in C^\infty$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+2x}{1+x}}$$

Scriem funcția în **serie Maclaurin**:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{13}{16}x^3 - \frac{141}{128}x^4 + \dots$$

Seria diverge ($x > \frac{1}{2}$), deci nu merge aplicată!

Aproximări Padé (2)

(Bonus) – Ce artitificiu putem aplica? **Schimbăm variabila**:

$$x = \frac{u}{1-2u} \Leftrightarrow u = \frac{x}{1+2x}$$

Obținem așadar:

$$f(x(u)) = \sqrt{\frac{1+\frac{2u}{1-2u}}{1+\frac{u}{1-2u}}} = \sqrt{\frac{1-2u+2u}{1-2u+u}} = (1-u)^{-\frac{1}{2}}$$

Dezvoltarea în serie e acum realizabilă:

$$f(x(u)) = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + \frac{5}{16}u^3 + \frac{35}{128}u^4 + \dots$$

Aproximări Padé (3)

Introducem **aproximarea Padé** drept un raport de polinoame, P_L și Q_M, de grade **cel mult** $L \in \mathbb{N}$, respectiv $M \in \mathbb{N}$, care încearcă să fie cât mai fidelă **seriei de puteri** a unei funcții date f.

$$\boxed{[L/M]_f = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}}$$

Vrem să fim cât mai aproape de seria de puteri, deci:

$$f(x) - [L/M]_f = f(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1})$$

Notăm cu $N = L + M$ **gradul aproximării Padé**.

Aproximări Padé (4)

Cum ar putea arăta polinoamele P_L și Q_M?

$$\begin{cases} P_L(x) &= p_0 + p_1 x + \dots + p_L x^L \\ Q_M(x) &= q_0 + q_1 x + \dots + q_M x^M \end{cases}$$

Fiind folosit **doar** raportul $\dfrac{P_L(x)}{Q_M(x)}$, se poate mai simplu?

$$\boxed{\begin{cases} P_L(x) &= p_0 + p_1 x + \dots p_L x^L \\ Q_M(x) &= 1 + q_1 x + \dots q_M x^M \end{cases}}$$

Aproximări Padé (5)

Cum calculăm aceste polinoame? Pornim de la formula:

$$f(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1})$$

Înmulțim prin $Q_M(x)$ și regrupăm:

$$\boxed{f(x) \cdot Q_M(x) = P_L(x) + O(x^{L+M+1})}$$

Aproximări Padé (6)

Teoremă (unicitatea aproximărilor Padé)

Atunci când există o aproximare Padé a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, anume $[L/M]_f$, aceasta este **unică**.

Puteți demonstra teorema ca temă...

Aproximări Padé – exemplu (1)

Să se determine toate aproximările Padé de grad $N = 2$ ale funcției $f(x) = e^{-x}$.

Câte aproximări Padé vom avea? 3, anume $(L, M) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$.

Care este seria de puteri a lui $f(x)$?

$$f(x) = e^{-x} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots$$

Aproximări Padé – exemplu (2)

Cazul 1. $L = 0$ și $M = 2$, deci vrem $[0/2]_f$.

Pornim de la sistemul $\begin{cases} P(x) = p_0 \\ Q(x) = 1 + q_1 x + q_2 x^2 \end{cases}$

Mai știm $f(x) - [0/2]_f = O(x^3)$. Obținem:

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots\right)(1 + q_1 x + q_2 x^2) = p_0 + O(x^3)$$

Prin simpla identificare, se obține:

$$\begin{cases} p_0 &= 1 \\ 0 &= q_1 - 1 \\ 0 &= \frac{1}{2} - q_1 + q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 &= 1 \\ q_1 &= 1 \\ q_2 &= \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{[0, 2]_f = \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2}x^2}}$$

Aproximări Padé – exemplu (3)

Cazul 2. $L = 1$ și $M = 1$, deci vrem $[1/1]_f$.

Pornim de la sistemul $\begin{cases} P(x) = p_0 + p_1 x \\ Q(x) = 1 + q_1 x \end{cases}$

Mai știm $f(x) - [1/1]_f = O(x^3)$. Obținem:

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots\right)(1 + q_1 x) = p_0 + p_1 x + O(x^3)$$

Prin simpla identificare, se obține:

$$\begin{cases} p_0 &= 1 \\ p_1 &= q_1 - 1 \\ 0 &= \frac{1}{2} - q_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 &= 1 \\ q_1 &= \frac{1}{2} \\ p_1 &= -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{[1, 1]_f = \frac{1 - \frac{1}{2}x}{1 + \frac{1}{2}x^2}}$$

Aproximări Padé – exemplu (4)

Cazul 3. $L = 2$ și $M = 0$, deci vrem $[2/0]_f$.

Pornim de la sistemul $\begin{cases} P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \\ Q(x) = 1 \end{cases}$

Mai știm $f(x) - [2/0]_f = O(x^3)$. Obținem:

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots\right)(1) = p_0 + p_1 x + p_2^2 x^2 + O(x^3)$$

Prin simpla identificare, se obține:

$$\begin{cases} p_0 &= 1 \\ p_1 &= -1 \\ p_2 &= \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{[2, 0]_f = 1 - x + \frac{x^2}{2}}$$

Bibliografie

Toate resursele bibliografice de care aveți nevoie se găsesc în descrierea cu care a venit atașată această prezentare.

Începând cu data viitoare, vă puteți aștepta oricând la ultima lucrare de laborator!

Sfârșit

Mulțumesc frumos pentru atenție!

Vă rog frumos să **completați formularul de feedback**!