Metode de Interpolare

Valentin-Ioan VINTILĂ

Facultatea de Automatică și Calculatoare - CTI
Universitatea POLITEHNICA București

25 aprilie 2023 (Lab. 8)

Cuprins

Ce este interpolarea?

Ce înțelegem prin evaluare?

Pentru câteva valori $x_0, \dots, x_n$ și o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **calculăm** punctele $M = \{(x_k, y_k) \mid f(x_k) = y_k\}$.

Ce înțelegem prin interpolare?

Procesul invers, adică încercăm să **găsim** funcția f astfel încât $M = \{(x_k, y_k) \mid f(x_k) = y_k\}$, unde M este dată.

Interpolarea polinomială (1)

Începem cu cea mai simplă formă de interpolare, **interpolarea polinomială**.

Aceasta presupune găsirea unui **singur** polinom care *vizitează* (trece prin) o mulțime de puncte dată.

Interpolarea polinomială (2)

Teoremă (unicitatea polinomului)

Fie dată o mulțime $M = \{(x_k, y_k) \mid k \in \overline{0, n}\}$ de puncte. Atunci, există un unic polinom de grad n care trece prin toate aceste puncte.

Concluzionăm deci că, în teorie, orice metodă polinomială va ajunge la același rezultat, acesta fiind unic.

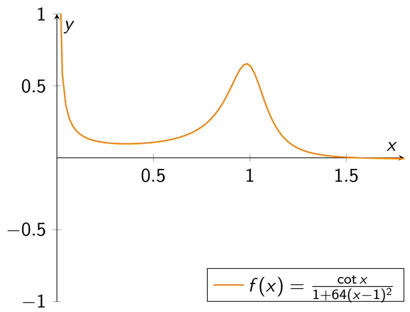
Interpolarea polinomială – vizualizare (1)

Să încercăm să interpolăm polinomial funcția:

$$f(x) = \frac{\cot x}{1 + 64(x-1)^2}$$

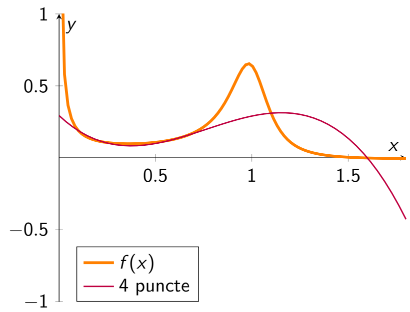
Considerăm intervalul $[0.1, 1.6]$ și vrem să vedem rezultatul pentru 4, 7, respectiv 9 puncte.

Interpolarea polinomială – vizualizare (2)



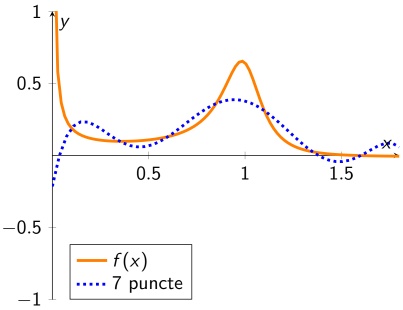
Graficul funcției $f(x)$ pe intervalul $[0.1, 1.6]$

Interpolarea polinomială – vizualizare (3)



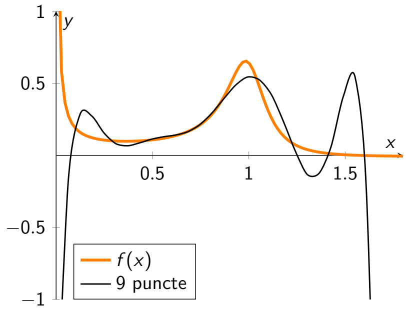
Graficul funcției $f(x)$ și interpolarea cu 4 puncte

Interpolarea polinomială – vizualizare (4)



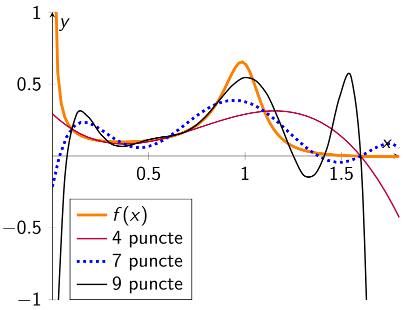
Graficul funcției $f(x)$ și interpolarea cu 7 puncte

Interpolarea polinomială – vizualizare (5)



Graficul funcției $f(x)$ și interpolarea cu 9 puncte

Interpolarea polinomială – vizualizare (6)



Graficul funcției $f(x)$ și interpolarea cu 4, 7 și 9 puncte

Alexandre-Théophile Vandermonde

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)

Interpolarea Vandermonde (1)

Să începem cu un polinom de forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Să conectăm acum o mulțime de puncte $M = \{(x_k, y_k) \mid k \in \overline{0, n}\}$ de acest polinom pentru a realiza interpolarea:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \quad \vdots \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Interpolarea Vandermonde (2)

Ce am obținut de fapt?

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Evident, un sistem de ecuații liniare:

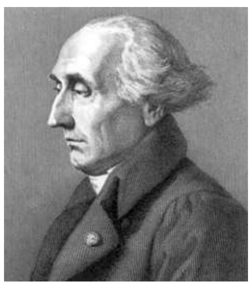
$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Interpolarea Vandermonde – concluzii

O folosim în practică?

NU, este foarte instabilă numeric! O utilizăm pentru mulțimi de cel mult 10 (rareori 20) de puncte.

Joseph-Louis Lagrange



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Interpolarea Lagrange (1)

Să începem prin a descrie **multiplicatorii Lagrange**:

$$L_k(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_k - x_0}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right) \cdot \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x - x_n}{x_k - x_n}\right) = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ i \ne j}} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$$

Ce este foarte special la ei?

$$\boxed{L_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = x_k \\ 0, & \text{dacă } x \ne x_k \end{cases}}, \ \forall x \in \{x_0, \ldots, x_n\}$$

Interpolarea Lagrange (2)

Înmulțim multiplicatorul Lagrange cu y_k:

$$y_k \cdot L_k(x) = \begin{cases} y_k, & \text{dacă } x = x_k \\ 0, & \text{dacă } x \ne x_k \end{cases}, \ \forall x \in \{x_0, \ldots, x_n\}$$

Însumăm toți termenii:

$$\boxed{L(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x)}$$

Interpolarea Lagrange – concluzii

O folosim în practică?

DA, chiar extraordinar de mult – este fundamentală în demonstrațiile multor metode numerice.

Eric Harold Neville

Eric Harold Neville (1889-1961)

Interpolarea Neville (1)

Prezentăm pe scurt și o **metodă bazată pe recurențe**.

Observăm următoarea dependență:

$P_{0,0}(x) \to \{y_0\}$

$P_{1,1}(x) \to \{y_1\}$

$P_{2,2}(x) \to \{y_2\}$

$P_{3,3}(x) \to \{y_3\}$

$P_{0,1}(x) \to \{y_0, y_1\}$

$P_{1,2}(x) \to \{y_1, y_2\}$

$P_{2,3}(x) \to \{y_2, y_3\}$

$P_{0,2}(x) \to \{y_0, y_1, y_2\}$

$P_{1,3}(x) \to \{y_1, y_2, y_3\}$

$P_{0,3}(x) \to \{y_0, y_1, y_2, y_3\}$

Interpolarea Neville (2)

Formula de recurență este de fapt:

$$\boxed{P_{i,j}(x) = \begin{cases} y_i, & \text{dacă } i = j \\ \dfrac{x_j - x}{x_j - x_i} P_{i,j-1}(x) + \dfrac{x - x_i}{x_j - x_i} P_{i+1,j}(x), & \text{dacă } i < j \end{cases}}$$

Interpolarea Neville (3)

Să ne uităm doar la $P_{i,i+1}$:

$$P_{i,i+1}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} P_{i,i}(x) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} P_{i+1,i+1}(x)$$

Ce se întâmplă în x_i și x_{i+1}?

$$\begin{cases} P_{i,i+1}(x_i) = P_{i,i}(x_i) = y_i \\ P_{i,i+1}(x_{i+1}) = P_{i+1,i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases}$$

Generalizat pentru orice x:

$$P_{i,i+1}(x) = \begin{cases} P_{i,i}(x_i) = y_i, & \text{dacă } x = x_i \\ P_{i+1,i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}, & \text{dacă } x = x_{i+1} \\ \text{neimportant}, & \text{altfel} \end{cases}, \ \forall i = \overline{0, n-1}$$

Interpolarea Neville (4)

Cu pași mărunți, putem trece acum la $P_{i,i+2}$:

$$P_{i,i+2}(x) = \begin{cases} y_i, & \text{dacă } x = x_i \\ y_{i+1}, & \text{dacă } x = x_{i+1} \\ y_{i+2}, & \text{dacă } x = x_{i+2} \\ \text{neimportant}, & \text{altfel} \end{cases}, \ \forall i = \overline{0, n-2}$$

Puteți demonstra această relație ca temă...

Unde e de fapt interpolarea noastră?

$$\boxed{P_{0,n}(x)}$$

Interpolarea Neville – concluzii

O folosim în practică?

Rar, deoarece este foarte lentă!

Funcții spline (1)

Ce înțelegem prin funcții spline? O funcție spline este o funcție *pe ramuri*, unde fiecare ramură este un polinom de un anumit grad:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} p_0(x), & x \in [\alpha_0, \alpha_1) \\ p_1(x), & x \in [\alpha_1, \alpha_2) \\ \vdots & \\ p_{n-1}(x), & x \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \end{cases}}, \ \forall x \in [\alpha_0, \alpha_n]$$

Care este gradul funcției spline? Evident, va fi cel mai mare grad al polinoamelor componente:

$$\boxed{\text{grad}(f) = \max_{0 \le k \le n-1} \left\{ \text{grad}(p_k) \right\}}$$

Funcții spline (2)

Definiție (clasa C^k)

Fie o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Spunem despre această funcție că este de clasă C^k (notăm $f \in C^k$) dacă și numai dacă derivatele de ordin $0 \dots k$ există și sunt continue.

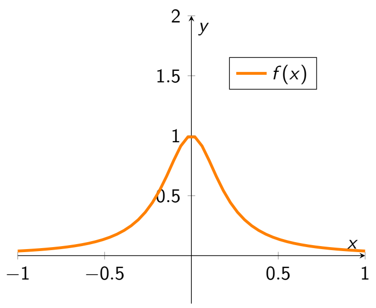
Definiția e bună și pentru funcțiile spline!

Funcții spline de clasă C^0, grad 1 (1)

Ce înseamnă (grafic) clasă C^0 și grad 1?

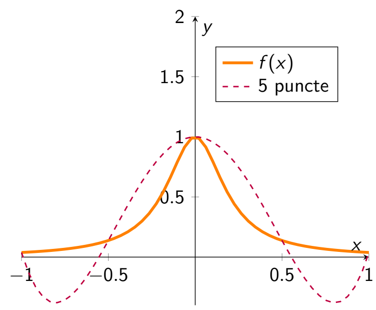
Segmente ce sunt unite între ele!

Funcții spline de clasă C^0, grad 1 – vizualizare (1)



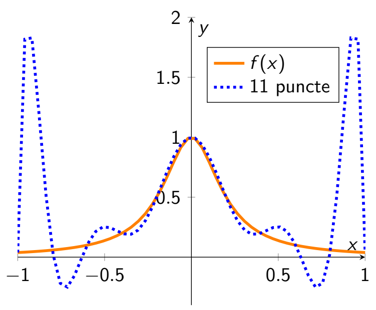
Graficul funcției $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

Funcții spline de clasă C^0, grad 1 – vizualizare (2)



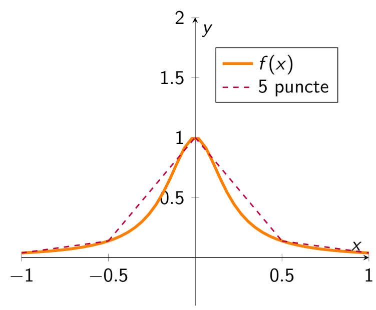
Interpolarea **polinomială** cu 5 puncte

Funcții spline de clasă C^0, grad 1 – vizualizare (3)



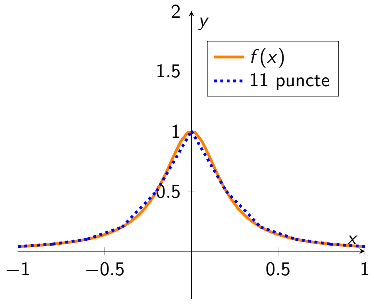
Interpolarea **polinomială** cu 11 puncte

Funcții spline de clasă C^0, grad 1 – vizualizare (4)



Interpolarea **spline** de clasă C^0, grad 1, cu 5 puncte

Funcții spline de clasă C^0, grad 1 – vizualizare (5)



Interpolarea **spline** de clasă C^0, grad 1, cu 11 puncte

Funcții spline de clasă C^0, grad 1 (2)

Avem o mulțime $M = \{(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = \overline{0, n}\}$ $(x_k < x_{k+1})$.

Pentru orice interval $[x_k, x_{k+1})$, vrem să găsim un polinom de forma $p_k(x) = a_k x + b_k$, unde $p_k : [x_k, x_{k+1}) \to \mathbb{R}$.

Funcții spline de clasă C^0, grad 1 (3)

Trebuie să respecte două tipuri de condiții:

1. **Condiții de interpolare** ($n + 1$ la număr)

$$\boxed{p_k(x_k) = y_k},\ \forall k = \overline{0, n-1},\ \text{și}\ \boxed{p_{n-1}(x_n) = y_n}$$

2. **Condiții de racordare** ($n - 1$ la număr)

$$\boxed{\lim_{x \nearrow x_{k+1}} p_k(x) = p_{k+1}(x_{k+1})},\ \forall k = \overline{0, n-2}$$

Funcții spline de clasă C^0, grad 1 (4)

Am zis că vrem $p_k(x) = a_k x + b_k$; putem afla ușor acum.

Prin calcul brut, obținem:

$$\boxed{\begin{cases} a_k & = \dfrac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \\ b_k & = \dfrac{x_{k+1} \cdot f(x_k) - x_k \cdot f(x_{k+1})}{x_{k+1} - x_k} \end{cases}},\ \forall k = \overline{0, n-1}$$

Funcții spline de clasă C^0, grad 1 – concluzii

Le folosim în practică?

Depinde foarte mult de aplicația lor. Acestea au un foarte mare neajuns – fiind de clasă C^0, nu au derivate *"frumoase"* (continue).

Funcții spline de clasă C^2, grad 3 (1)

Schimbăm așadar clasa și gradul.

Pentru fiecare interval $[x_k, x_{k+1})$, căutăm:

$$\boxed{p_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3}$$

Funcții spline de clasă C^2, grad 3 (2)

Ce condiții impunem?

1. **Condiții de interpolare** ($n + 1$ la număr)

$$\boxed{p_k(x_k) = y_k},\ \forall k = \overline{0, n-1},\ \text{și}\ \boxed{p_{n-1}(x_n) = y_n}$$

2. **Condiții de racordare** ($3n - 3$ la număr)
   - **Continuitate** ($n - 1$ condiții):

$$\boxed{\lim_{x \nearrow x_{k+1}} p_k(x) = p_{k+1}(x_{k+1})},\ \forall k = \overline{0, n-2}$$

   - **Continuitatea derivatei de ordin** 1 ($n - 1$ condiții):

$$\boxed{\lim_{x \nearrow x_{k+1}} \frac{dp_k}{dx}(x) = \frac{dp_{k+1}}{dx}(x_{k+1})},\ \forall k = \overline{0, n-2}$$

Funcții spline de clasă C^2, grad 3 (3)

- **Continuitatea derivatei de ordin** 2 ($n - 1$ condiții):

$$\boxed{\lim_{x \nearrow x_{k+1}} \frac{d^2 p_k}{dx^2}(x) = \frac{d^2 p_{k+1}}{dx^2}(x_{k+1})},\ \forall k = \overline{0, n-2}$$

Avem $4n - 2$ ecuații, dar ne trebuie $4n$.

Conlcuzie – ultimele două ecuații sunt SINTETICE.

Funcții spline de clasă C^2, grad 3 (4)

Putem așadar să alegem între:

- **Interpolare naturală** – cel mai simplu caz, considerăm derivata și derivara de ordin 2 nule:

$$\boxed{\frac{d^2p_0}{dx^2}(x_0) = 0} \text{ și } \boxed{\frac{d^2p_{n-1}}{dx^2}(x_n) = 0}$$

- **Interpolare tensionată** – considerăm date (cunoscute) derivatele în punctele x_0 și x_n:

$$\boxed{\frac{dp_0}{dx}(x_0) = F'(x_0)} \text{ și } \boxed{\frac{dp_{n-1}}{dx}(x_n) = F'(x_n)}$$

- Alte tipuri de interpolare, de exemplu *periodică* – vă îndemn să aruncați singuri un ochi pe ea.

Funcții spline de clasă C^2, grad 3 (5)

Interpolarea naturală se poate scrie sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3(a_2-a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1-a_0)}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{3(a_n-a_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{3(a_{n-1}-a_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Funcții spline de clasă C^2, grad 3 (6)

Interpolarea tensionată se poate scrie sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(a_1-a_0)}{h_0} - 3f'(x_0) \\ \frac{3(a_2-a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1-a_0)}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{3(a_n-a_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{3(a_{n-1}-a_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 3f'(x_n) - \frac{3(a_n-a_{n-1})}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Funcții spline de clasă C^2, grad 3 – concluzii

Le folosim în practică? DA

Sergei Natanovich Bernstein

Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968)

Polinoame Bernstein (1)

Fie B_n^k (cu $n \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{0,n}$) polinoame de forma:

$$\boxed{B_n^k(x) = C_n^k \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}}, \ \forall k = \overline{0,n}$$

Acestea alcătuiesc **baza polinomială Bernstein**.

De unde provin? Din dezvoltarea lui:

$$\left[x + (1-x)\right]^n = 1$$

Polinoame Bernstein (2)

Polinoamele de forma B_n^k urmează recurența:

$$\boxed{B_n^k(x) = (1-x)B_{n-1}^k(x) + xB_{n-1}^{k-1}(x)}, \ \forall x \in [0,1]$$

Puteți demonstra ca temă...

Polinoame Bernstein (3)

Definiție (polinoame Bernstein)

Fie $f(x)$ un polinom definit ca o combinație liniară de elemente ale unei baze polinomiale Bernstein, adică:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0 B_n^0(x) + \alpha_1 B_n^1(x) + \dots + \alpha_n B_n^n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_n^k(x) \end{aligned}$$

Acest polinom se numește **polinom Bernstein**.

Pierre Bézier

Pierre Bézier (1910-1999)

Curbe Bézier (1)

Există funcții mult prea complicate pentru a fi scrise analitic.

În acest caz, se utilizează **curbele Bézier**.

Curbe Bézier (2)

Fie $M = \{P_k \in \mathbb{R}^\mu \mid k = \overline{0,n}\}$, unde $n, \mu \in \mathbb{N}^*$, $\mu \geq 2$, o mulțime de $n+1$ puncte distincte. Atunci, **curba Bézier** $B : [0,1] \to \mathbb{R}^\mu$ care trece prin toate aceste puncte este definită sub forma acestui polinom Bernstein:

$$\boxed{B(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_n^k(t)} \Leftrightarrow B(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k \cdot C_n^k \cdot t^k \cdot (1-t)^{n-k}$$

Vizualizare: `https://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier_curve#Higher-order_curves`

Paul de Casteljau

Paul de Casteljau (1930-2022)

Algoritmul De Casteljau (1)

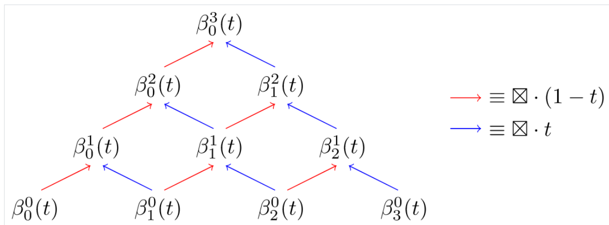
Are la bază recurența de la bazele polinomiale Bernstein:

$$\boxed{\beta_i^j(t) = \begin{cases} P_i, & \text{dacă } j = 0 \\ (1-t)\beta_i^{j-1}(t) + t\beta_{i+1}^{j-1}(t), & \text{dacă } i \neq 0 \end{cases}}, \ \forall i = \overline{0,n},\ j = \overline{0,i}$$

Soluția va sta în $B(t) = \beta_0^n(t)$.

Algoritmul De Casteljau (2)

Observăm următoarea dependență:



Bibliografie

Toate resursele bibliografice de care aveți nevoie se găsesc în descrierea cu care a venit atașată această prezentare.

Sfârșit

Mulțumesc frumos pentru atenție!

Vă rog frumos să **completați formularul de feedback**!