# Valori Proprii (1)

**Valentin-Ioan VINTILĂ**

Facultatea de Automatică și Calculatoare - CTI
Universitatea POLITEHNICA București

28 martie 2023 (Lab. 5)



## Cuprins





## Surpiză (1)

Pentru acest laborator, m-am gândit să vă fac o **surpriză plăcută!**

Scoateți o foaie de hârtie și un pix – **dăm lucrare!**



## Surpiză (2)

**Sper că v-a plăcut!**



## Valori și vectori proprii (1)

Dacă $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, numim $\lambda$ **valoare proprie** și $\boldsymbol{x}$ **vectorul propriu** asociat.

Definim **polinomul caracteristic** $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Îl folosim pentru a afla valorile și vectorii proprii (prin **ecuația caracteristică** $p(\lambda) = 0$).

Totalitatea acestor valori proprii formează **spectrul** matricei și se notează fie $\lambda(A)$, fie $\sigma_A$:

$$\boxed{\lambda(A) = \sigma_A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}}$$

Introducem și **raza spectrală**:

$$\boxed{\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \lambda(A)} \{|\lambda_i|\}}$$



## Valori și vectori proprii (2)

Două proprietăți importante ale **valorilor proprii**:

1. **Suma** lor dă **urma** matricei:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(A) \left( = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \right)$$
2. **Produsul** lor dă **determinantul** matricei:
$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A)$$



## Matrice asemenea (1)

**Definiție (matrice asemenea)**

Fie două matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Acestea se consideră **asemenea** dacă există o matrice nesingulară $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ cu proprietatea:

$$\boxed{B = TAT^{-1}}$$

Se notează de obicei $A \sim B$.



## Matrice asemenea (2)

Două proprietăți importante ale **matricelor asemenea**, să zicem $A$ și $B$ (deci $B = TAT^{-1} \Leftrightarrow A \sim B$), sunt:

1. **Conservarea spectrului.** Spectrul matricei $A$ este identic cu spectrul matricei $B$, adică $\lambda(A) = \lambda(B)$;
2. **Transferul vectorilor proprii.** Dacă $\boldsymbol{x}$ este un vector propriu pentru $A$, atunci $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$ este un vector propriu pentru $B$.

## Matrice diagonalizabile (1)

**Definiție (matrice diagonalizabile)**

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice pătratică, $n \in \mathbb{N}^*$. Numim această matrice **diagonalizabilă** dacă este asemenea cu o matrice diagonală.

Altfel spus, dacă există $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonală astfel încât $A = T\Lambda T^{-1} \Leftrightarrow A \sim \Lambda$, atunci $A$ este diagonalizabilă.



## Matrice diagonalizabile (2)

Matricea $\Lambda$ va conține pe diagonală valorile proprii ai lui $A$.

Ca să aflăm matricea $T$, trebuie să aflăm vectorii proprii ai matricei $A$. Din vectorii proprii asociați acestora, scoatem **o bază** pe care o dispunem pe coloanele matricei $T$:

$$T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} & \dots & \boldsymbol{b_n} \end{bmatrix}, \text{ unde } B = \{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$$

Aici, $B$ este **baza subpsațiului vectorilor proprii**.



## Matrice diagonalizabile (3)

Cine vine **la tablă** pentru a diagonaliza $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Spectrul va fi $\lambda(A) = \{\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2\}$, ceea e înseamnă că matricea diagonală este $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Vectorii proprii vor fi de forma $\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ și $\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, deci

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (astfel încât $A = T\Lambda T^{-1}$).



## Matrice diagonalizabile (4)

**Sunt toate matricele diagonalizabile? NU**, motiv pentru care ne trebuie ceva mai general.



## Matrice Jordan (1)

**Cea mai simplă formă la care poate fi redusă orice matrice (prin transformări de asemănare) este forma Jordan.**

Forma Jordan ($J \in \mathbb{C}^{n\times n}$) este o matrice **bloc diagonală** ce conține pe diagonala principală matrice de forma $J_k \in \mathbb{C}^{n_k\times n_k}$.

Acestea conțin pe diagonala principală aceeași valoare $\lambda_k$, iar imediat deasupra diagonalei principale se găsesc valori de 1.



## Matrice Jordan (2)

Spre exemplu, pentru o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, forma Jordan va fi:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n'\leq n} \end{bmatrix}, \text{ unde } J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Ca să alegem $\lambda_k$, ne uităm în $\lambda(A)$. Pentru a afla $n_k$, numărăm de câte ori apare $\lambda_k$ în $\lambda(A)$ (multiplicitatea sa algebrică).



## Matrice Jordan (3)

Să vedem cum arată matricea Jordan pentru:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculați în Octave care sunt valorile proprii ale matricei $A$ (puteți apela funcția **eig(A)**). Matricea Jordan va fi:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$



## Semyon Aranovich Gershgorin

**Semyon Aranovich Gershgorin** (1901-1933)

## Cercurile lui Gershgorin (1)

**Teoremă (cercurile lui Gershgorin)**

Toate valorile proprii ale unei matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, se găsesc în interiorul reuniunii **cercurilor (discurilor) lui Gershgorin**:

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - A_{ii}| \le \sum_{j=1, j \ne i}^{n} |A_{ij}| \right\}$$

Cu alte cuvinte:

$$\sigma_A \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

*Încercați să demonstrați ca temă!*



## Cercurile lui Gershgorin (2)

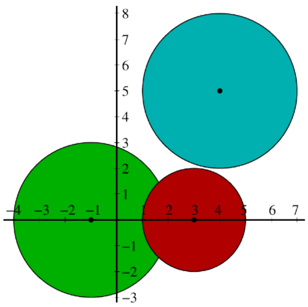
Să încercăm să construim discurile lui Gershgorin pentru:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & i & 1 \\ -1 & 4+5i & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Menționăm că $\sigma_A$ cuprinde: $\begin{cases} \lambda_1 \approx -1.5793 + 0.2731i \\ \lambda_2 \approx 3.4686 - 0.0005i \\ \lambda_3 \approx 4.1107 + 4.7275i \end{cases}$



## Cercurile lui Gershgorin (3)




**Sursă:** `https://golem.ph.utexas.edu/category/2016/08/in_praise_of_the_gershgorin_di.html`



## Descompunerea spectrală (1)

**Teoremă (descompunere spectrală)**

Orice matrice pătratică $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este simetrică dacă și numai dacă există o **matrice ortogonală** $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ și o **matrice diagonală** $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ astfel încât să se formeze transformarea de asemănare:

$$A = Q \Lambda Q^T$$

unde $Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_1} & \dots & \boldsymbol{q_n} \end{bmatrix}$ este formată din vectorii proprii asociați matricei $A$ și formează o bază ortonormată, iar $\Lambda$ se calculează utilizând $\lambda(A)$.



## Descompunerea spectrală (2)

Două proprietăți interesante ar fi:

- O matrice simetrică are **exclusiv** valori proprii **reale**;
- Rangul lui $A$ este dat de numărul de valori proprii nenule.



## Descompunerea spectrală (3)

Să considerăm descompunerea spectrală $A = Q \Lambda Q^T$.

Se poate demonstra atunci că ridicarea la puterea $n \in \mathbb{N}^*$ a matricei $A$ poate fi scrisă sub forma:

$$\boxed{A^n = Q \Lambda^n Q^T}$$

*Demonstrația rămâne ca temă...*



## Coeficientul Rayleigh (1)

**Definiție (coeficientul Rayleigh)**

Fie o matrice pătratică $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ este un vector asociat matricei $A$, atunci **coeficientul Rayleigh** se definește drept **scalarul** (funcția $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$):

$$\boxed{r(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||^2} = \left(\frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}\right)^T A \left(\frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}\right)}$$



## Coeficientul Rayleigh (2)

Avem deci formula:

$$r(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||^2} = \left(\frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}\right)^T A \left(\frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}\right)$$

Aplicăm acum coeficientul Rayleigh pe un vector propriu.

**Vom obține chiar $\lambda$, valoarea proprie asociată.**

*Demonstrația la tablă...*

## Metoda puterii directe (1)

Fie matricea simetrică $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, cu spectrul $\lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ astfel încât:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Căutăm o metodă de a calcula **valoarea proprie (pre)dominantă**, $\lambda_1$.



## Metoda puterii directe (2)

Cunoaștem $A$ simetrică, deci avem descompunerea spectrală:

$$A = Q \Lambda Q^T$$

Vectorii din $Q$ sunt ortonormali, deci **formează o bază** în $\mathbb{R}^n$.

Deci, orice vector $\boldsymbol{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ se poate scrie ca o **combinație liniară**:

$$\boldsymbol{y}^{(0)} = x_1 \boldsymbol{q_1} + \dots + x_n \boldsymbol{q_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{q_i}$$

Alternativ, dacă notăm $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, putem scrie:

$$\boxed{\boldsymbol{y}^{(0)} = Q\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = Q^{-1}\boldsymbol{y}^{(0)}}$$



## Metoda puterii directe (3)

Cunoaștem și faptul că $A^k = Q \Lambda^k Q^T$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, deci:

$$A^k Q = Q \Lambda^k \Rightarrow \boxed{A^k \boldsymbol{q_i} = \lambda_i^k \boldsymbol{q_i}}$$

Obținem așadar că $\boxed{\boldsymbol{q_i} = \frac{A^k}{\lambda_i^k} \boldsymbol{q_i}}$ **– ce este așa spectaculos?**

**Exact, l-am scris pe $\boldsymbol{q_i}$ față de el însuși, ceea ce ne duce cu gândul la metodele iterative!**



## Metoda puterii directe (4)

Vom considera $\boldsymbol{y}^{(0)}$ aproximația inițială a vectorului propriu asociat valorii proprii predominante.

Considerăm $\boldsymbol{y}^{(k)}$ îmbunătățirea la pasul $k \in \mathbb{N}^*$.

Așadar, din $\boldsymbol{q_i} = \frac{A^k}{\lambda_i^k} \boldsymbol{q_i}$, formăm: $\boxed{\boldsymbol{y}^{(k)} = \frac{A}{\lambda_1} \boldsymbol{y}^{(k-1)}}$



## Metoda puterii directe (5)

**Ce se întâmplă dacă aplicăm coeficientul Rayleigh pe $\boldsymbol{y}^{(k)}$?** Vom obține o aproximație a lui $\lambda_1$!

**Ce problemă are recurența $\boldsymbol{y}^{(k)} = \frac{A}{\lambda_1} \boldsymbol{y}^{(k-1)}$?** Ea presupune deja cunoscută valoarea lui $\lambda_1$, pe care vrem să îl aflăm.

**Cum reparăm?** Normalizăm:

$$\boxed{\boldsymbol{y}'^{(k)} = \frac{\boldsymbol{y}^{(k)}}{||\boldsymbol{y}^{(k)}||} = \frac{A\boldsymbol{y}^{(k-1)}/\lambda_1}{||A\boldsymbol{y}^{(k-1)}/\lambda_1||} = \frac{A\boldsymbol{y}^{(k-1)}}{||A\boldsymbol{y}^{(k-1)}||} = \frac{A\boldsymbol{y}'^{(k-1)}}{||A\boldsymbol{y}'^{(k-1)}||}}$$



## Metoda puterii directe - sinteză

Trecem la algoritm – facem notația: $\boldsymbol{y}^{(k)} \to \boldsymbol{t}$

Algoritmic, MPD se poate scrie astfel:

1. Se aproximează $\boldsymbol{y}'^{(0)}$ (primește o valoare de început);
2. Pentru fiecare pas $k \in \mathbb{N}^*$, procedăm astfel:
   - Se calculează un *vector auxiliar*: $\boldsymbol{t} = A\boldsymbol{y}'^{(k-1)}$;
   - Acest vector normalizat va fi chiar $\boldsymbol{y}'^{(k)}$, adică $\boldsymbol{y}'^{(k)} = \frac{\boldsymbol{t}}{||\boldsymbol{t}||}$;
   - Folosind coeficientul Rayleigh, se poate calcula o nouă aproximare a valorii proprii predominante:

$$\lambda_1^{(k)} = r\left(\boldsymbol{y}'^{(k)}\right) = \frac{\left(\boldsymbol{y}'^{(k)}\right)^T A \left(\boldsymbol{y}'^{(k)}\right)}{||\boldsymbol{y}'^{(k)}||^2} = \left(\boldsymbol{y}'^{(k)}\right)^T A \left(\boldsymbol{y}'^{(k)}\right)$$



## Metoda puterii directe - concluzii

**O folosim în practică?** NU! *Vom vedea de ce preferăm să utilizăm metoda puterii inverse...*



## Bibliografie

Pentru această prezentare, am utilizat:


1. Cărțile *Matrix Decomposition and Applications*, respectiv *Numerical Matrix Decomposition and its Modern Applications: A Rigorous First Course* ale lui **Jun Lu**;
2. Cartea *Linear Algebra and Its Applications* (2006), **Gilbert Strang**;
3. Cartea *Parallel Scientific Computing in C++ and MPI* (2003), scrisă de **George Em Karniadakis** și **Robert M. Kirby II**;
4. Articolul *Numerical Solution of Linear Eigenvalue Problems*, scris de **Jessica Bosch** și **Chen Greif**.

# Sfârșit

**Mulțumesc frumos pentru atenție!**

Vă rog frumos să **completați formularul de feedback**!